

経済成長理論

市東 亘

shito@seinan-gu.ac.jp

平成 27 年 1 月 11 日

概観

成長理論の動機

- 時代や国によって、経済成長率に差があるのはなぜか？
- 国ごとに所得の格差があるのはなぜか？

生産関数, $Y = F(K, L)$, より, 成長の源泉は

- 資本ストックの投入量の増大
- 人口成長
- 技術進歩

であることが分かる. ここでは, 新古典派成長理論であるソローモデルと, ケインジアン的世界に似たハロッド・ドーマーモデルを学ぶ.

1 ソロー・モデル

1.1 モデルの特徴

- 経済成長は超長期的な視点で考察するので, 価格が伸縮的に調整される長期モデル
⇒ 市場の需給は均衡している.
- 古典派的世界なので実物経済モデル.
- 経済成長が生じれば, 経済全体の集計量は成長していく. 集計量の値が変化し続ける中で, 値が変化しない変数を用いて表される状態を「定常状態」と呼ぶ. 定常状態が均衡状態でもある場合は, 「定常均衡」とも呼ぶ.
- 人口成長を導入する経済成長モデルでは, 定常状態を表すのに, 一人当たりに変換した変数を用いる.

例. Y : 国民所得 or 国民総生産 (GDP)
 $\frac{Y}{L} = y$: 一人当たり国民所得 or 一人当たり GDP

- 人口成長率 $\Delta L/L = n$ は外生的に与えられる定数.
- 資本ストックは $\delta > 0$ の率で減耗する. 資本減耗率 δ は外生的に与えられる定数.
- 単純化のため, 政府なしで, $G = 0$, $T = 0$, を仮定.

1.2 モデル

労働市場	$L = \bar{L}$
資本ストック市場	$K = \bar{K}$ $\Delta \bar{K} = I - \delta \bar{K}$ 資本ストックが投資によって形成されていく.
財・サービス市場	$Y = C + I$
金融（貸借）市場	（ワルラス法則より省略）
企業	$Y = F(K, L)$ （規模に関して収穫一定） $I = \Delta K + \delta K$ 資本ストックの形成過程より.
家計	$C = C(Y)$, $\bar{K}$, $\bar{L}$ 供給.

留意点

- 古典派の静学モデルでは, 資本ストックの総量 $\bar{K}$ は一定であったが, 成長理論では投資による資本形成を考慮している.
- 古典派の静学モデルでは, 投資は利子率に依存して決まり, 利子率は貸借市場の調整で決まっていた. 成長理論では, 投資は利子率ではなく, 資本形成過程から内生的に決まる.
- 古典派の静学モデルでは, 投資は単に財の消費と変わらなかったが, 成長理論では, 資本形成を通じて生産へのフィードバックがモデル化されている.
- ワルラスの法則から省略されている貸借市場の需給均衡は, 財市場の均衡条件より,

$$Y - C = I$$

$$\Leftrightarrow S = I$$

で, 貯蓄投資バランスを表す.

1.3 一般均衡

$$\begin{cases} \bar{Y} = F(\bar{K}, \bar{L}) \\ \bar{Y} = C(\bar{Y}) + I \\ \Delta \bar{K} = I - \delta \bar{K} \end{cases} \Leftrightarrow I = I(r) \text{ なら古典派の静学モデルと同じ!}$$

上の式から I を消去する.

$$\begin{aligned} \Delta \bar{K} &= \bar{Y} - C(\bar{Y}) - \delta \bar{K} \\ &= S(\bar{Y}) - \delta \bar{K} \end{aligned}$$

以上の式を一人当たりの変数（小文字）に変換し直す.

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \frac{\bar{Y}}{\bar{L}} = F\left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}, \frac{\bar{L}}{\bar{L}}\right) = F(\bar{k}, 1) \quad (\text{規模に関して収穫一定より}) \\ \quad \Leftrightarrow \bar{y} = f(\bar{k}) \\ \textcircled{2} \quad \frac{\bar{Y}}{\bar{L}} = \frac{C(\bar{Y})}{\bar{L}} + \frac{I}{\bar{L}} \\ \quad \Leftrightarrow \bar{y} = c(\bar{y}) + i \\ \textcircled{3} \quad \Delta \bar{k} = \Delta \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right) = \frac{\Delta \bar{K} \cdot \bar{L} - \bar{K} \Delta \bar{L}}{\bar{L}^2} = \frac{\Delta \bar{K}}{\bar{L}} - \frac{\bar{K}}{\bar{L}} \frac{\Delta \bar{L}}{\bar{L}} \\ \quad \Leftrightarrow \Delta \bar{k} = \frac{I - \delta \bar{K}}{\bar{L}} - \bar{k} n \\ \quad \Leftrightarrow \Delta \bar{k} = i - \delta \bar{k} - \bar{k} n \\ \quad \Leftrightarrow \Delta \bar{k} = i - (\delta + n) \bar{k} \end{array} \right.$$

一人当たりの資本ストックの増分は、減価償却プラス人口成長分だけ少なくなる. 上の式から i を消去する.

$$\begin{aligned} \Delta \bar{k} &= \bar{y} - c(\bar{y}) - (\delta + n) \bar{k} \\ &= s(\bar{y}) - (\delta + n) \bar{k} && s() \text{ は一人当たりの貯蓄関数} \\ &= s \cdot \bar{y} - (\delta + n) \bar{k} && \text{限界貯蓄性向を } s \text{ とおく. } s(\bar{y}) = s\bar{y} \\ &= sf(\bar{k}) - (\delta + n) \bar{k} && (y = f(k) \text{ より}) \end{aligned} \quad (1)$$

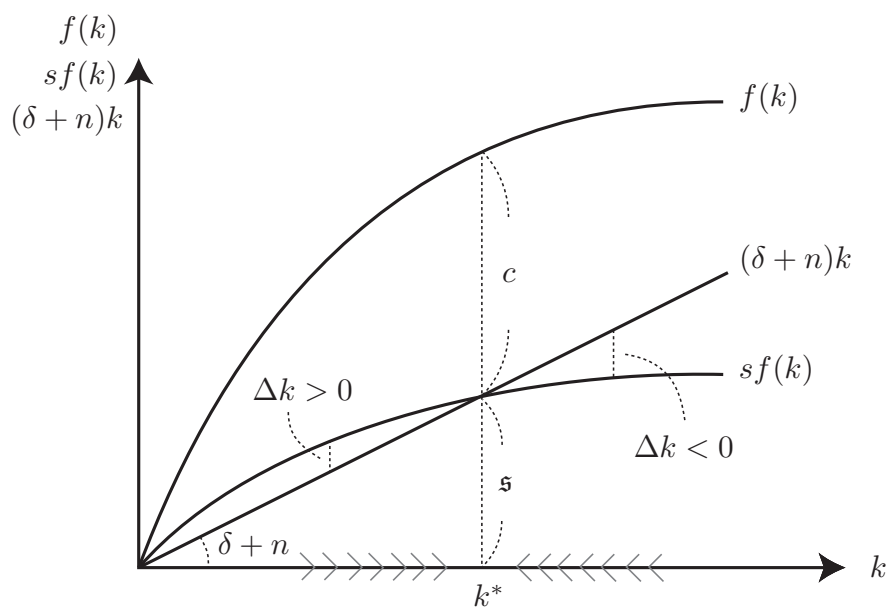
今後は完全雇用水準を表す変数のバーを外すが、全ての内生変数は完全雇用水準であることに注意. 外生変数は s , δ , n .

1.4 定常状態

一人当たりの資本ストック総量 k が、一定の値にとどまる状態を定常状態とする.

$$\begin{aligned} \Delta k = 0 \quad sf(k) &= (\delta + n)k && \Rightarrow \text{定常状態} \\ \Delta k > 0 \quad sf(k) &> (\delta + n)k && \Rightarrow \Delta y > 0 \text{ で経済成長} \\ \Delta k < 0 \quad sf(k) &< (\delta + n)k && \Rightarrow \Delta y < 0 \end{aligned}$$

したがって、投資 $sf(k)$ と資本ストックの減少分（資本減耗 + 人口成長による取り分の減少）のバランスで、資本の変化量が決まり、実質 GDP の経済成長 Δy が決まる.



1.5 均斉的成長

人口成長 $\Delta L/L = n > 0$ の下では,

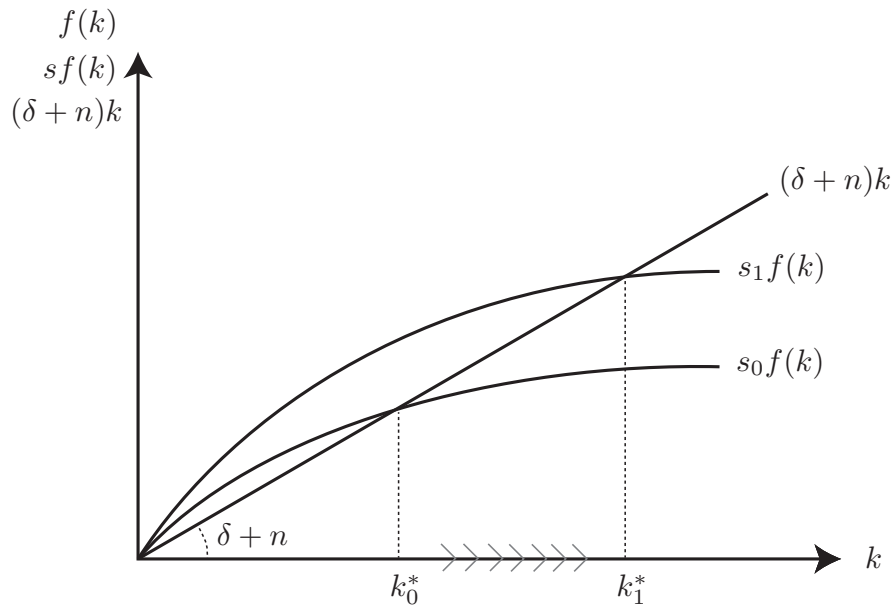
- 定常均衡では一人当たりの資本 $k = K/L$ が一定なため, 分子 K も n の率で成長.
- 定常均衡では一人当たりの生産 $y = Y/L = f(k)$ が一定なため, 分子 Y も n の率で成長.

実質 GDP, 資本ストックなど経済全体の変数が全て同じ n の率で成長

$\Rightarrow$ 均斉的成長 (balanced growth)

1.6 貯蓄率の変化

- $s \uparrow \Rightarrow k \uparrow \Rightarrow \uparrow y = f(k)$
- 成長効果: k の成長は一時的.
- 水準効果: 定常水準 y の増大は永続的.



1.7 資本の黄金律水準

水準効果をもたらす貯蓄率は高ければ高いほど良いか? $\Rightarrow$ No!

個々人にとっては消費水準が高いほうが満足度が高い.

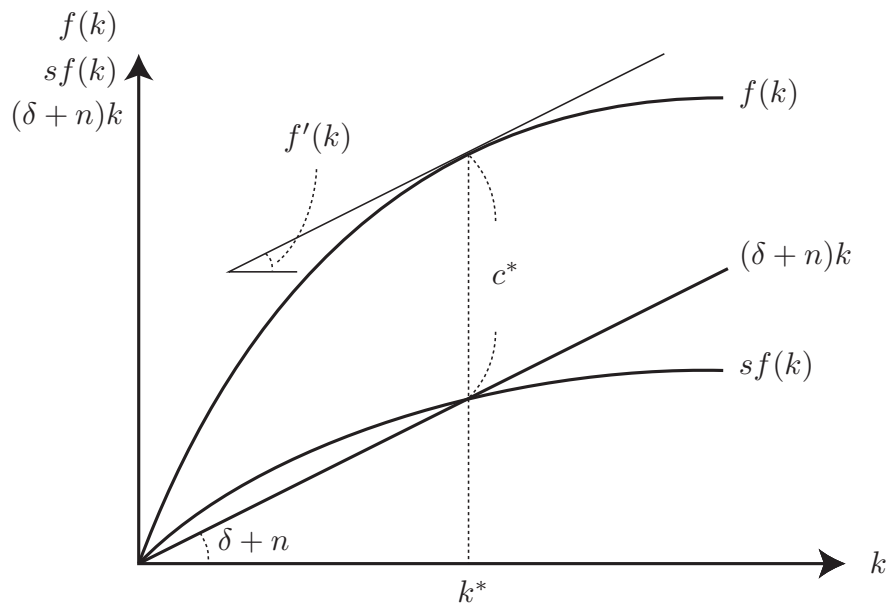
$\Downarrow$

消費水準を最大にする資本の定常水準を, 資本の黄金律水準 (the golden rule of capital) と呼ぶ.

消費を最大にするには?

$$\begin{aligned}
 y &= c + i \\
 \Leftrightarrow c &= y - i \\
 \Leftrightarrow c^* &= f(k^*) - (\delta + n)k^* \quad (\text{定常状態 } \Delta k = 0 \text{ で, } i^* = (\delta + n)k^*) \\
 \frac{dc^*}{dk^*} &= f'(k^*) - (\delta + n) = 0 \\
 f'(k^*) &= \delta + n
 \end{aligned}$$

資本の限界生産性が, 一人当たりの資本の取り分の減少分と同じ時, 消費を最大にする.



黄金律は自動的に達成されない。外生的に決まる限界貯蓄性向 s が、黄金律 $f'(k^*) = \delta + n$ と整合的でなければならない。

2 ハロッド・ドーマー・モデル

新古典派成長モデルでは、

- 完全雇用水準を保ちながら均斉的成長が実現。
- 定常均衡が安定的。

こうした特徴は、資本と労働の代替性にあることをここで示す。

ハロッド・ドーマーの成長モデルの特徴

- 資本と労働が特定の組み合わせの時のみ意味を持つ（代替不可能）。
- 均斉的成長均衡が不安定（ナイフエッジの原理）。

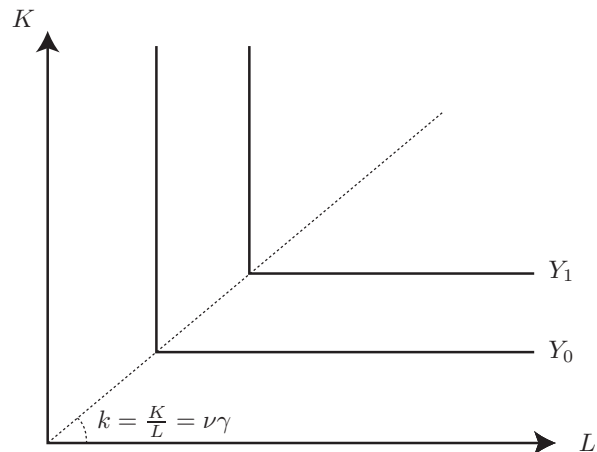
2.1 モデルの修正

レオンチェフ型の生産関数を導入し、資本と労働が代替不可能なケースを考える。

$$Y = F(K, L) = \min \left[\left(\frac{1}{\nu} \right) K, \gamma L \right]$$

- ν : 資本係数。1 単位の生産に必要な資本投入量 (K/Y) で資本の生産技術を表す定数。資本の産出係数、資本・産出量比率ともいう。
- γ : 労働の生産性を表す定数。

- $(\frac{1}{\nu}) K < \gamma L \Rightarrow Y = (\frac{1}{\nu}) K$
- $(\frac{1}{\nu}) K > \gamma L \Rightarrow Y = \gamma L$
- $(\frac{1}{\nu}) K = \gamma L \Rightarrow Y = (\frac{1}{\nu}) K = \gamma L$. この時, $K/L = \nu\gamma$.
- レオンチェフ型の生産関数は規模に関して収穫一定 ($zY = F(zK, zL)$).



一人当たりに変換

- 両辺を L で割ると, 一人当たりの生産関数を得る.

$$\begin{aligned} \frac{Y}{L} &= \min \left[\left(\frac{1}{\nu} \right) \frac{K}{L}, \gamma \frac{L}{L} \right] \\ \Leftrightarrow y &= \min \left[\left(\frac{1}{\nu} \right) k, \gamma \right] = f(k) \end{aligned}$$

- $(\frac{1}{\nu}) k = \gamma \Rightarrow y = (\frac{1}{\nu}) k = \gamma$. この時, $k = \nu\gamma$.
- $k = \nu\gamma$ は, 資本労働比率 K/L ($= \frac{K/L}{L/L} = k$) と呼ばれ, 等産出量曲線の角を結ぶ直線の傾きに等しい.
- 生産関数以外はソロー・モデルと同じ仮定なので, この生産関数をソロー・モデルで導出した (1) 式に代入. ただし, 資本減耗率は, 簡単化のため $\delta = 0$ とする.

$$\begin{aligned} \Delta k &= s \cdot \min \left[\left(\frac{1}{\nu} \right) k, \gamma \right] - nk \\ &= \min \left[\left(\frac{s}{\nu} \right) k, s\gamma \right] - nk \end{aligned}$$

2.2 定常状態

$$\Delta k = 0 \iff sf(k^*) = nk^*$$

- 定常状態でかつ資本が全て使われているケース.

$$sf(k^*) = \frac{s}{\nu} k^* = nk^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{\nu} = n$$

この時、経済全体の変数は人口成長率もしくは s/ν の率で成長. 資本ストックのフル稼働が実現する成長率 s/ν を保証成長率と呼ぶ.

- さらに、労働も完全雇用になるためには、

$$k^* = \nu\gamma$$

を満たしていなければならない.

- したがって、資本ストックと労働が共に完全雇用水準を保ちながら成長する均斉的成長を達成するには、保証成長率と人口成長率が等しくなければならない.

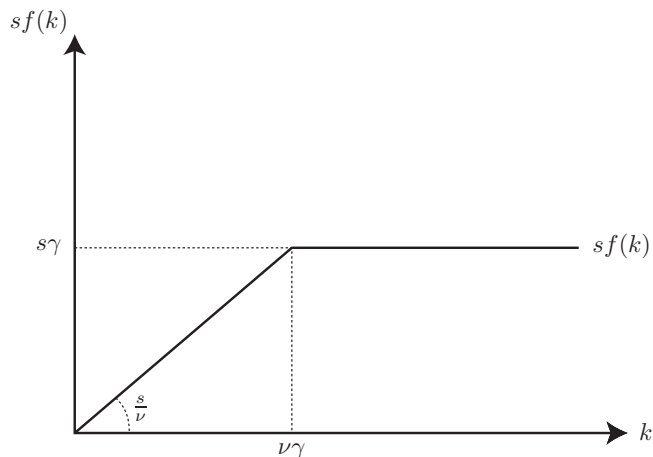
2.3 安定性

ソロー・モデルと同じように、 $sf(k)$ と nk のグラフを描き、 k の動きを見てみる.

- (1) $i = sf(k) = \min \left[\left(\frac{s}{\nu} \right) k, s\gamma \right]$ のグラフ.

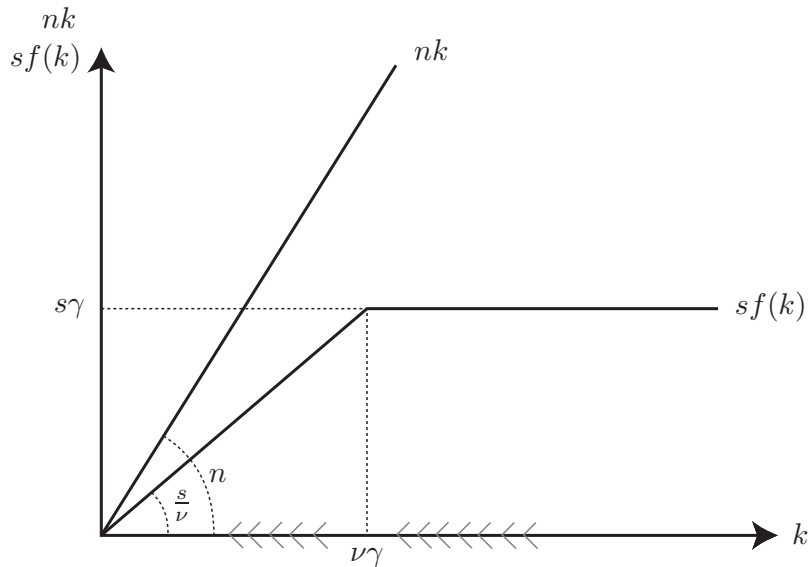
$$sf(k) = \frac{s}{\nu} k \quad \text{if } \frac{s}{\nu} k < s\gamma \Leftrightarrow k < \nu\gamma$$

$$sf(k) = s\gamma \quad \text{if } \frac{s}{\nu} k > s\gamma \Leftrightarrow k > \nu\gamma$$



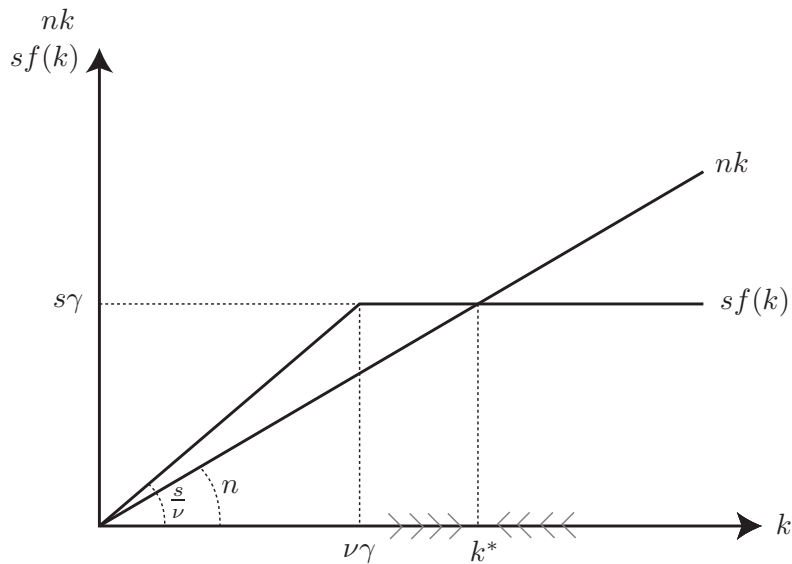
(2) $n > \frac{s}{\nu}$ のケース

$sf(k) < nk$ for all k . よって, $\Delta k < 0$ for all k . 定常状態を実現する資本ストック水準は存在しない.



(3) $n < \frac{s}{\nu}$ のケース

ソロー・モデルと同様, 定常状態 k^* に安定的に収束するが, $k^* > \nu\gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}k^* > \gamma$ で資本ストックが過剰 (労働不足).



s, ν, n は共に外生変数. この 3 つのパラメータが $\frac{s}{\nu} = n$ を満たす必然性はない. さらに, 上記いずれのケースも完全雇用を達成する均斉成長均衡に収束しない. したがって, 均斉成長均衡は不安定.

⇒ ナイフ・エッジの原理