第11章 最適化

市東 亘
shito@seinan-gu.ac.jp

平成25年7月26日

今までの最適化問題では選択変数は1つだった．多数の財を生産している企業の利潤最大化問題などでは，選択変数はもっと多くなる．例えば，利潤を最大化する生産要素の投入量の組み合わせなどが問題になってくる．

ここでは，まず2つの選択変数を含む目的関数 $z = f(x, y)$ の極値を求める方法を学び，最後に n 変数の場合まで拡張する．

本章の目的

- 2次偏導関数と2次全微分を学ぶ．
- 2変数関数の極値問題を理解する．
- 2次形式と正値定符号と負値定符号，ヘッセ行列式を学ぶ．
- 多変数関数の最適化を学ぶ．
- 多変数関数から成る経済モデルの最適化問題を解く．

1 2次偏導関数と全微分

- 2次偏導関数

  $z = f(x, y)$ の偏微係数を求める．

  (1) 1次偏導関数

$$f_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad f_y \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$$

(2) 2 次偏導関数

$$f_{xx} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(f_x) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}$$

$$f_{yy} \equiv \frac{\partial}{\partial y}(f_y) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy} &\equiv \frac{\partial}{\partial y}(f_x) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ f_{yx} &\equiv \frac{\partial}{\partial x}(f_y) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \end{aligned}\right\} \quad \text{交差偏微分}$$

$f_{xy} = f_{yx}$ 　ヤングの定理．偏微分する順序は関係ない．

例題　$z = f(x,y) = x^3 + 5xy - y^2$ に関する $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$ をそれぞれ求めよ．

(3) 2 次全微分

$z = f(x,y)$ の偏微係数を求める．

$dz =$

$d^2 z = d(dz) =$

例題　$z = f(x, y) = x^3 + 5xy - y^2$ の d^2z を求めよ．

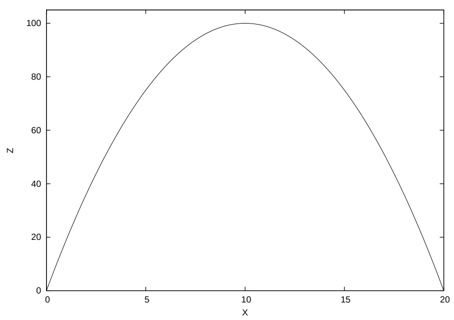
課題

(1) テキスト pp.357–362 を読む．

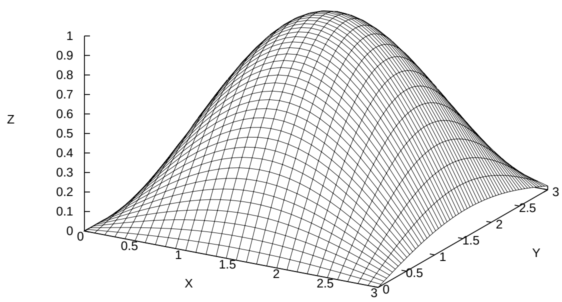
(2) 練習問題 11.1，1–4．ただし，ログ ln と，対数 e が出てくる問題を除く．

2　2 変数関数の極値

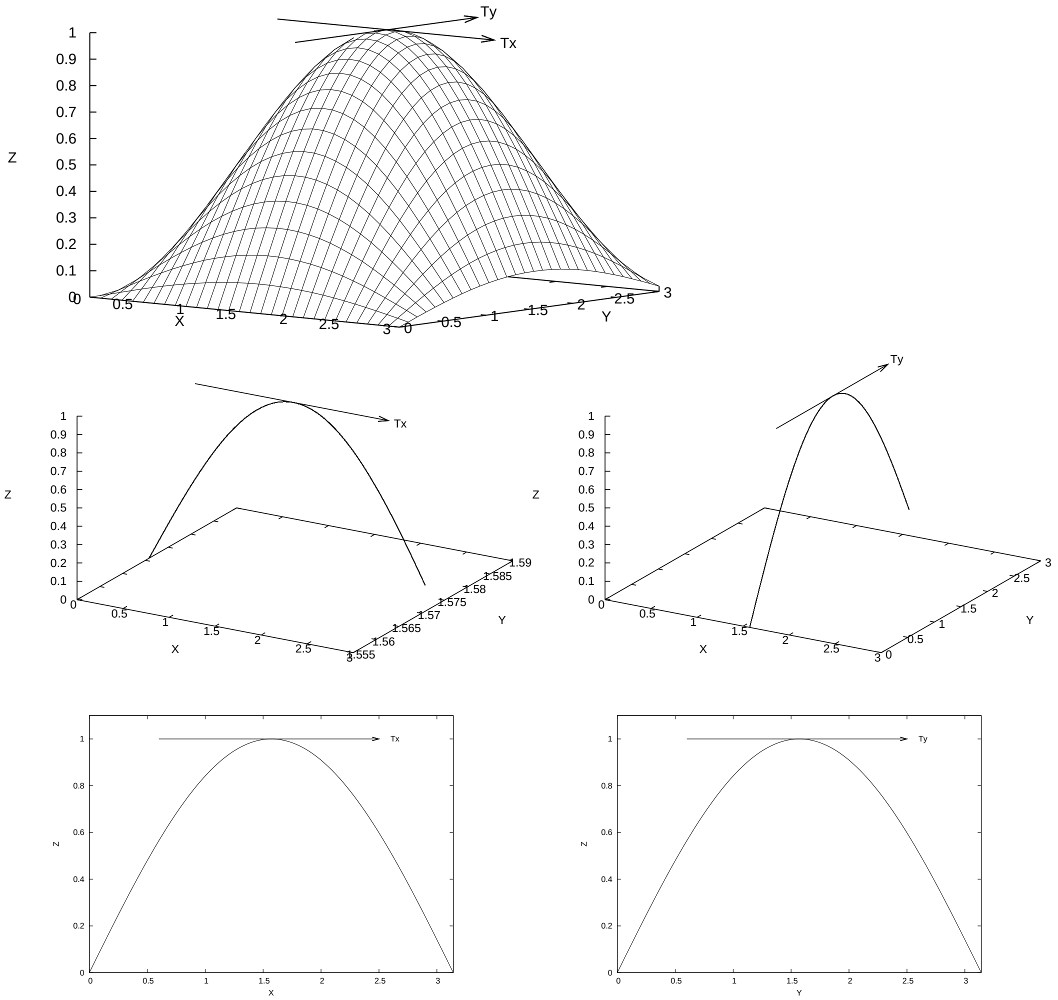
独立変数が 1 変数の場合の極大．
2 次元で表される．



独立変数が 2 変数の場合の極大．
奥行きがあり，3 次元で表される．



(1) 1 階の条件



グラフの頂上では $\left\{\begin{array}{l} y \text{ を一定にして } x \text{ 軸方面の変化 } T_x \text{ を見ても} \\ x \text{ を一定にして } y \text{ 軸方面の変化 } T_y \text{ を見ても} \end{array}\right\}$ 傾きは一定.

故に，$\underline{\hspace{5cm}}$ or $\underline{\hspace{5cm}}$

これが，極値の必要条件 or 1 階の条件.（極大・極小のいずれでも同じ条件）

↑

これだけでは，極値であるために十分ではない！

(2) 1 階の条件の別の考え方

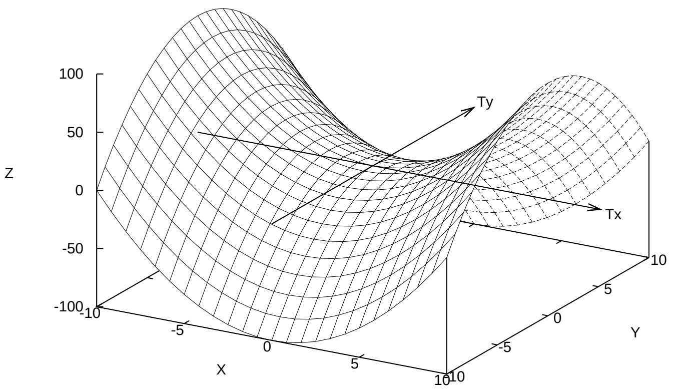
極値ならば，停留点なので $dz =$ ________

$dz =$

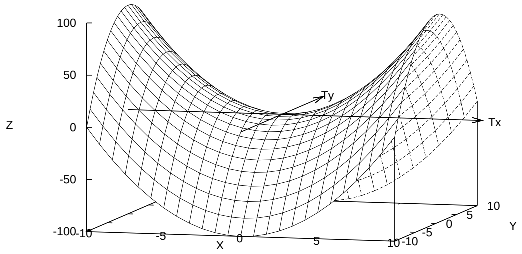
x や y が停留点からどちらへ動いても，すなわち，dx や dy がどんな値であろうとも，$dz =$ ________ になるには， ____________________ でなければならない．

(3) なぜ十分条件ではないのか？

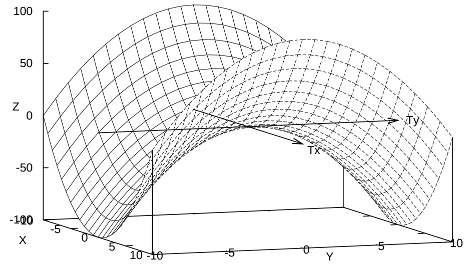
鞍点では，T_x，T_y，いずれの方向においても傾きがゼロ．



しかし，x 軸面から見ると極大だが，y 軸面から見ると極小になっていて，3 次元空間では極大・極小にいずれにもなっていない．

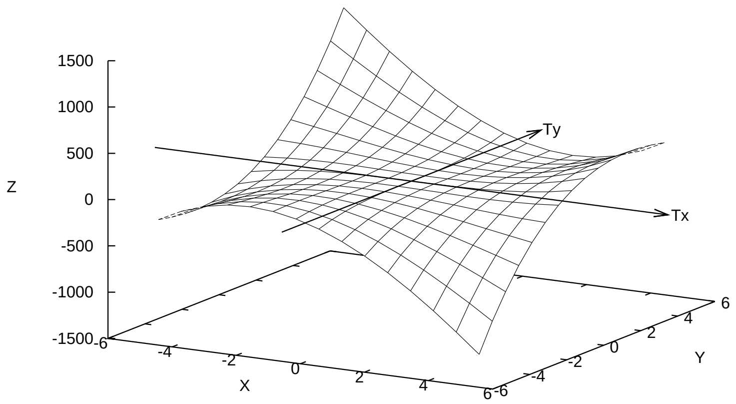


x 軸面から見た図．



y 軸面から見た図．

下図では，T_x，T_y の傾きはゼロだが，いずれの方向においても変曲点になっていて極値になっていない．

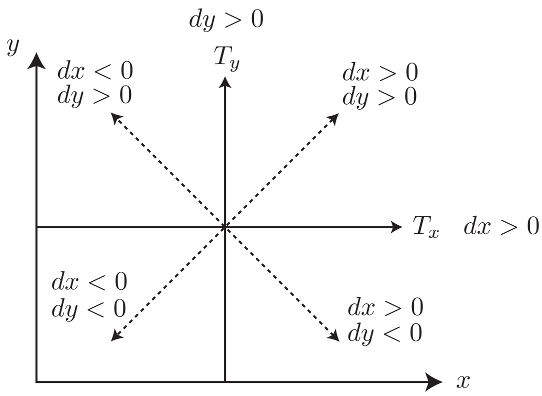


(4) 2 階の条件

鞍点や変曲点では，x 方向のみ or y 方向のみに関して z の変化を見たため，極値を判断するのに十分ではなかった．

$$\Downarrow$$

極値をとる点を上から見た時，あらゆる方向に関して z の値の変化を調べる必要がある．



交差偏微分が重要になってくる！

- 極大のケース

  停留点である極値では $dz = 0$. そこからそれると z は ________ $\Longrightarrow$ dz ____ 0

  $$\Downarrow$$

  極値からそれると $dz = 0 \longrightarrow dz < 0$ で dz が減少するため ________

  $d^2z =$

- 極小のケース

  停留点である極値では $dz = 0$. そこからそれると z は ________ $\Longrightarrow$ dz ____ 0

  $$\Downarrow$$

  極値からそれると $dz = 0 \longrightarrow dz > 0$ で dz が上昇するため ________

  $d^2z =$

考察

- 上で得た条件は，dz の値をチェックすることによって得たので，x と y がどのように動いても（dx，dy がどのような値および符号でも）極大 or 極小となるのに十分な条件である．
- 2 階の条件は，十分条件であって必要条件ではないことに注意．なぜなら，$f_{xx}f_{yy} = f_{xy}^2$ で上の条件が満たされなくても極値になる可能性があるから．
- 2 階の条件の導出で，始めに $dz = 0$ を仮定して，その後 dz がどう変化するかという事実を用いた．したがって，2 階の条件に出てくる f_{xx}，f_{yy}，f_{xy} は全て，$f_x = f_y = 0$ を満たす停留点において評価された偏導関数である．

まとめ　$z = f(x, y)$ の極値の条件

	極大	極小	
1 階	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$	
2 階	f_{xx}，$f_{yy} < 0$	f_{xx}，$f_{yy} > 0$	$\longleftarrow$ 独立変数が 1 変数の場合と似ている．
	かつ	かつ	
	$f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$	$f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$	$\longleftarrow$ 極大・極小のどちらでも同じ．

もし，$f_{xx}f_{yy} < f_{xy}^2$ なら，d^2z の符号が dz，dy の符号に応じて変化するので，極値は鞍点となる．

課題

(1) テキスト pp.363–369 を読む．

(2) 練習問題 11.2，1–3．

3　2 次形式

$$\left.\begin{array}{ll} 4x - 9y + z & 1\text{ 次形式} \\ 4x^2 - xy + 3y^2 & 2\text{ 次形式} \\ 3z^2x + 2yx^2 + 5xyz & 3\text{ 次形式} \end{array}\right\}$$

各項の指数の和が同じ場合，その多項式は「形式」と呼ばれる．

(1) 2 次形式としての 2 次全微分

$$\left.\begin{array}{ccccccc} d^2z & = & f_{xx}\,dx^2 & + & 2\,f_{xy}\,dx\,dy & + & f_{yy}\,dy^2 \\ q & = & a\,u^2 & + & 2\,h\,u\,v & + & b\,v^2 \end{array}\right\}$$

2 次全微分は u と v の 2 次形式で表される．

ただし　$d^2z \equiv q$,　$u \equiv dx$,　$v \equiv dv$,
$a \equiv f_{xx}$,　$b \equiv f_{yy}$,　$h \equiv f_{xy}$　で a, b, h は定数．

極大なら，いかなる u，v に対しても q は ________

極小なら，いかなる u，v に対しても q は ________

$$\Downarrow$$

我々は，u と v がいかなる値をとっても，q が常に正または負となるような，a，b，h の条件を知りたい！

(2) 正値定符号と負値定符号

用語

もし q が常に $\left\{\begin{array}{cc} \text{正} & (>0) \\ \text{非負} & (\geq 0) \\ \text{非正} & (\leq 0) \\ \text{負} & (<0) \end{array}\right\}$ であれば，$\left\{\begin{array}{ll} \text{正値定符号} & \text{positive definite} \\ \text{半正値定符号} & \text{positive semidefinite} \\ \text{半負値定符号} & \text{negative semidefinite} \\ \text{負値定符号} & \text{negative definite} \end{array}\right.$

任意の u と v の値に対して，$q = au^2 + 2huv + bv^2$ の符号を確定させるには，この式を平方完成すればよい．

$q =$

任意の値をとる u，v に対して，

$$\left\{\begin{array}{l} \text{常に } q > 0 \text{（正値定符号）であるためには，} a > 0 \text{ かつ } ab - h^2 > 0 \\ \text{常に } q < 0 \text{（負値定符号）であるためには，} a < 0 \text{ かつ } ab - h^2 > 0 \end{array}\right.$$

上の条件下では a と b の符号は必ず一致することに注意．

(3) 行列式を用いた 2 次形式の符号テスト

正値・負値定符号の条件は，行列式を用いるともっと簡潔に表すことが出来る．

$$\begin{aligned} q &= au^2 + 2huv + bv^2 \\ &= a(u^2) + h(uv) \\ &\quad + h(uv) + b(v^2) \\ &= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この係数行列の行列式が 2 次形式 q の判別式 (discriminant) になる．

今，係数行列の行列式を $|D|$ とおくと，

$|D| =$

で，先ほどの 2 次形式の符号を決定する条件の 1 つを得る．さらに，$|D|$ の部分行列式（首座小行列式 principle minor）を用いると全ての条件を得る．

$$|D_1| = |a| = a$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2$$

故に，

q は　$|D_1| > 0$　かつ　$|D_2| > 0$　の時，そしてその時にのみ正値定符号．

$|D_1| < 0$　かつ　$|D_2| > 0$　の時，そしてその時にのみ負値定符号．

(4) 最適化の 2 階の条件との関係

$$\begin{array}{ccccccc} d^2z & = & f_{xx}\,dx^2 & + & 2\,f_{xy}\,dx\,dy & + & f_{yy}\,dy^2 \\ q & = & a\,u^2 & + & 2\,h\,u\,v & + & b\,v^2 \end{array}$$

であったことを思い出すと，

$$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} =$$

したがって，

$$\begin{array}{llll} d^2z > 0 & \iff & |H_1| > 0, \quad |H_2| > 0 & \\ & \iff & f_{xx} > 0, \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 & \implies \quad 極小 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} d^2z < 0 & \iff & |H_1| < 0, \quad |H_2| > 0 & \\ & \iff & f_{xx} < 0, \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 & \implies \quad 極大 \end{array}$$

f_{xx} と f_{yy} は同符号であることが上の条件から保証される．したがって，8 ページの表に示した 2 階の条件は冗長であることが分かる．

(5) 3 変数の 2 次形式

3 変数，u_1，u_2，u_3 を含む 2 次形式は次のように表せる．

$$
\begin{aligned}
q(u_1,u_2,u_3) &= d_{11}(u_1^2) + d_{12}(u_1u_2) + d_{13}(u_1u_3) \\
&\quad + d_{21}(u_2u_1) + d_{22}(u_2^2) + d_{23}(u_2u_3) \\
&\quad + d_{31}(u_3u_1) + d_{32}(u_3u_2) + d_{33}(u_3^2) \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \equiv u'D\,u \qquad \text{行列表示の 2 次形式}
\end{aligned}
$$

係数行列 D から，3 つの首座小行列式が得られる．

$$
|D_1| \equiv d_{11} \qquad |D_2| \equiv \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} \qquad |D_3| \equiv \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}
$$

2 次形式の平方完成を作ると，首座小行列式を用いて以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
q =& d_{11}\left(u_1 + \frac{d_{12}}{d_{11}}u_2 + \frac{d_{13}}{d_{11}}u_3\right)^2 \\
&+ \frac{d_{11}d_{22} - d_{12}^2}{d_{11}}\left(u_2 + \frac{d_{11}d_{23} - d_{12}d_{13}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2}u_3\right)^2 \\
&+ \frac{d_{11}d_{22}d_{33} - d_{11}d_{23}^2 - d_{22}d_{13}^2 - d_{33}d_{12}^2 + 2d_{12}d_{13}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2}(u_3)^2
\end{aligned}
$$

$$
=|D_1|\left(\cdots\cdots\right)^2 + \frac{|D_2|}{|D_1|}\left(\cdots\cdots\right)^2 + \frac{|D_3|}{|D_2|}\left(\cdots\cdots\right)^2
$$

正値定符号 $q > 0$ であるための必要十分条件は，上の式の括弧の係数が全て正．

$$
\begin{aligned}
&|D_1| > 0 \\
&|D_2| > 0 \qquad (|D_1| > 0 \text{ だから}) \\
&|D_3| > 0 \qquad (|D_2| > 0 \text{ だから})
\end{aligned}
$$

負値定符号 $q < 0$ であるための必要十分条件は，上の式の括弧の係数が全て負．

$$
\begin{aligned}
&|D_1| < 0 \\
&|D_2| > 0 \qquad (|D_1| < 0 \text{ だから}) \\
&|D_3| < 0 \qquad (|D_2| > 0 \text{ だから})
\end{aligned}
$$

まとめ

2 次形式 q が，$\begin{cases} \text{正値定符号} & \Longleftrightarrow \quad \text{全ての首座小行列式 } |D_i| \text{ が正.} \\ \text{負値定符号} & \Longleftrightarrow \quad \text{奇数番目の首座小行列式が負.} \\ & \qquad\;\; \text{偶数番目の首座小行列式が正.} \end{cases}$

※ この条件は，変数が 4 以上になっても一般に成立する．

課題

(1) テキスト pp.370–377 を読む．

(2) 練習問題 11.3，1–5．

4 3 変数以上を含む目的関数

3 つの選択変数の例．$z = f(x_1, x_2, x_3)$ のケース．

(1) 極値のための 1 階の条件

停留点では $dz =$ ________

$dz =$ ____

これが，いかなる dx_i $(i = 1, 2, 3)$ で成立するためには，

____

※応用

関数 $z = f(x_1, x_2, x_3)$ が明示的に与えられておらず，$F(z, x_1, x_2, x_3) = 0$ によって隠伏的に定義されている時，z を最大化する 1 階の条件を考える．

$$\begin{aligned} & F_z dz + F_{x_1} dx_1 + F_{x_2} dx_2 + F_{x_3} dx_3 = 0 \\ \leftrightarrow \quad & dz = -\frac{F_{x_1}}{F_z} dx_1 - \frac{F_{x_2}}{F_z} dx_2 - \frac{F_{x_3}}{F_z} dx_3 \qquad (\text{ただし，} F_z \neq 0) \end{aligned}$$

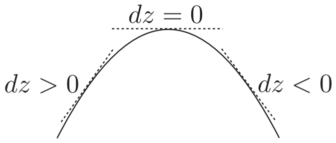
停留点では $dz = 0$ より，f.o.c. は，

$$\begin{aligned} & -\frac{F_{x_1}}{F_z} = -\frac{F_{x_2}}{F_z} = -\frac{F_{x_3}}{F_z} = 0 \qquad (1) \\ \leftrightarrow \quad & f_1 = f_2 = f_3 = 0 \qquad (\text{陰関数定理より } f_i \equiv \partial z / \partial x_i = -F_{x_i}/F_z) \end{aligned}$$

1 階の条件式 (1) は，$F_z \neq 0$ であることを考慮すると以下と同値である．

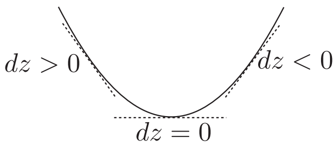
$$F_{x_1} = F_{x_2} = F_{x_3} = 0$$

(2) 2 階の条件



$dz>0 \longrightarrow dz=0 \longrightarrow dz<0$

dz は減少していっている．したがって，dz の変化量 $d(dz)$ は，$d(dz)=\underbrace{d^2z<0}_{\text{負値定符号}}$　（極大）



$dz<0 \longrightarrow dz=0 \longrightarrow dz>0$

dz は増加していっている．したがって，dz の変化量 $d(dz)$ は，$d(dz)=\underbrace{d^2z>0}_{\text{正値定符号}}$　（極小）

z の 2 次全微分 d^2z の符号はヘッセ行列式

$$|H|=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

をもとに，その首座小行列式を用いて調べることが出来たことを思い出そう．したがって，

$$|H_1|=f_{11} \qquad |H_2|=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \qquad |H_3|=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

を用いて以下の 2 階の条件を得る．

$$d^2z \text{ は } \begin{cases} |H_1|>0,\ |H_2|>0,\ |H_3|>0 & \text{であれば，正値定符号で } z \text{ の極小．} \\ |H_1|<0,\ |H_2|>0,\ |H_3|<0 & \text{であれば，負値定符号で } z \text{ の極大．} \end{cases}$$

※ 以上の結果は，$z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ というふうに n 変数になってもそのまま拡張できる．

(3) n 変数関数の極値条件のまとめ．

目的関数: $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

	極大	極小
1 階	$f_1=f_2=\cdots=f_n=0$ （または任意の dx_i に対して $dz=0$）	$f_1=f_2=\cdots=f_n=0$ （または任意の dx_i に対して $dz=0$）
2 階	$\|H_1\|<0,\ \|H_2\|>0,\ \|H_3\|<0,\ \cdots$ （または d^2z が負値定符号）	$\|H_1\|>0,\ \|H_2\|>0,\ \|H_3\|>0,\ \cdots$ （または d^2z が正値定符号）

課題

(1) テキスト pp.384–394 を読む.

(2) 練習問題 11.4 (p.394)，1–3.

5 経済学における最適化問題の例

(1) 2 財を生産する完全競争企業の利潤最大化問題.（p.395 例 1）

（仮定） 1 つの企業が完全競争市場で 2 つの財を供給 (Q_1, Q_2)．生産した財の市場価格はそれぞれ P_1, P_2 円．この企業の費用は $C = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$ で与えられている.

（目的） この企業の最適供給量（生産量）を導出する.

(a) 目的関数の設定.

(b) 1 階の条件（必要条件）の導出

(c) 2 階の条件（十分条件）

(2) 2 財を生産する独占企業の利潤最大化問題.（p.396 例 2）

（仮定） 1 つの企業が 2 つの財を独占的に供給．生産した財は売れ残らず全て売れる．独占企業は次の様な需要に直面している

$$Q_1 = 40 - 2P_1 + P_2 \quad (\partial Q_i/\partial P_i < 0 \text{ より需要関数の性質を満たしているのがわかる.})$$
$$Q_2 = 15 + P_1 - P_2 \quad (\partial Q_i/\partial P_j > 0\ (i \neq j) \text{ より代替財であることが分かる.})$$

費用は，$C = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$ で与えられる．

（目的） この独占企業の最適供給量（生産量）を導出する．

(a) 目的関数の設定.

(b) 1 階の条件（必要条件）の導出

(c) 2 階の条件（十分条件）

(3) 独占企業による価格差別.（p.398 例 3）

（仮定） ある映画館が，上映時間（供給量）と入場料（価格）を決めようとしている．上映時間と価格は，大人，学生，小人とターゲットを絞って設定しようと考えている．大人，学生，小人料金をそれぞれ，P_1，P_2，P_3 とし，それぞれの需要量を Q_1，Q_2，Q_3 とする．

(a) 目的関数の設定
1 つの財しか生産していなくても，異なる市場で売っていれば，2 つ以上の選択変数を含む最適化問題になる．

(b) 1 階の条件（必要条件）

(c) 価格付けに関する考察

(d) 2 階の条件（十分条件）

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1'' - C'' & -C'' & -C'' \\ -C'' & R_2'' - C'' & -C'' \\ -C'' & -C'' & R_3'' - C'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |H_1| &= R_1'' - C'' < 0 \\ |H_2| &= (R_1'' - C'')(R_2'' - C'') - (C'')^2 > 0 \\ |H_3| &= R_1''R_2''R_3'' - (R_1''R_2'' + R_1''R_3'' + R_2''R_3'')C'' < 0 \end{aligned}$$

が 1 階の条件が成立する点で満たされれば，利潤最大化になる．1 つ目の条件は，

$$\begin{aligned} & R_1'' < C'' \\ \leftrightarrow \quad & \frac{dMR_1}{dQ_1} < \frac{dMC}{dQ} \end{aligned}$$

より，第 1 市場の限界収入曲線の傾きが財全体の供給曲線の傾きよりも小さい時に，利潤が最大になるということを示している．

(4) 2 生産要素を用いて生産を行う完全競争企業の利潤最大化問題.

（仮定） 資本ストック K と労働 L を用いて生産を行う．生産物は完全競争市場で取引されるため生産物の価格 p は企業にとって所与．企業の生産技術は生産関数 $Y = F(K, L)$ で与えられる．資本ストック 1 単位当たりの価格（資本のレンタルコスト）を r，労働 1 単位あたりの価格（賃金）を w とする．生産要素市場は完全競争的で，要素価格は企業にとって所与[a].

[a]ここでは，区別し易いように内生変数を大文字に，外生変数を小文字にしている．実際の経済分析では，大文字は名目変数，小文字は実物変数に割り当てることが多い．

(a) 最適化問題のセットアップ.

(b) 1 階の条件（必要条件）

(c) 均衡値

上の 1 階の条件を内生変数について解いたものが均衡値になる．ここでは，生産関数が一般形でしか与えられていないため明示的に解くことが出来ない．たとえ，均衡値を明示的に解くことが出来なくても，陰関数定理を用いて比較静学は行える点に注意.

(d) 2 階の条件（十分条件）

上で得た条件 $F_{KK} < 0$ と $F_{KK}F_{LL} - F_{KL}^2 > 0$ は生産関数の 2 次全微分が負値定符号，すなわち，$d^2F < 0$ を意味している．つまり，生産関数が 1 階の条件が成立する点で concave（原点に凹）であれば 2 階の条件が局所的に成立し，1 階の条件が成立する点で利潤は局所的に極大になる．もし，モデルを設定する時に，生産関数 F が大域的に concave であると仮定していたら，1 階の条件が成立する利潤は大域的な最大値となる．

課題

(1) テキスト pp.395–402 を読む．

(2) 練習問題 11.5 (p.407)，1–5.

6 最適化の比較静学的側面

比較静学: 外生変数の変化 $\longrightarrow$ 均衡の変化

$\uparrow$

最適化の ________________ で描写される.

$\Downarrow$

第 8 章で学んだ比較静学を ________________ 式に適用すればよい.

(1) 前節で解いた「2 財を生産する完全競争企業の利潤最大化問題」のケース.

1 階の条件から得られた企業の最適生産水準が均衡値.

$$Q_1^* = \frac{4P_1 - P_2}{15} \qquad Q_2^* = \frac{4P_2 - P_1}{15}$$

左辺に内生変数，右辺に外生変数の形で明示的に表されているので，上の式をそれぞれの外生変数で偏微分してやれば，外生変数が変化した時の均衡値の変化を見ることが出来る.

(2) 前節で解いた「2 生産要素を用いて生産を行う完全競争企業の利潤最大化問題」のケース．

この問題では，均衡値が 1 階の条件を満たす陰関数で与えられるため，上のケースのように単純に内生変数を外生変数で偏微分できない．このような時に，第 8 章で学んだ全微分や Jacobian を用いた分析が有用になる．

(a) 賃金が上昇したとき，均衡における雇用量，資本ストック量，生産量の変化をそれぞれ求めよ．

(b) 生産物価格が上昇したとき，均衡における雇用量，資本ストック量，生産量の変化をそれぞれ求めよ．
上の例を参考に各自で．

課題

(1) テキスト pp.408–409 を読む．