# 第 9 章 最適化 Optimization

市東 亘
shito@seinan-gu.ac.jp

平成 20 年 12 月 15 日

**今までの分析**

経済モデルの均衡が，ある方程式体系で与えられたとき，外生的ショックが均衡点をどのように動かすかという比較静学分析．

**第４部 最適化問題とは？**

均衡の描写に用いられてきた方程式体系は一体どうやって導くのか，その方法を学ぶ．

$$\text{方程式体系} = \text{均衡条件}\begin{cases} \text{市場均衡条件} & = \quad \text{事後的な調和によって成立．無目的．} \\ \text{主体均衡条件} & = \quad \text{経済を構成する主体の目的 or 目標を} \\ & \qquad \text{意識的に達成することによって成立．} \end{cases}$$

- 第 4 部ではとくに，最適状態を伝統的な手法 = 微分法によって求める．
- 新しい手法 = 数理計画法は第 6 部で扱われる．(本講義では扱わない．)

## 本章の目的

- 1 変数関数の最適化を学ぶ．
- 関数の最大化，最小化の必要条件と十分条件を理解する．
- 2 階の微分（2 次導関数）を学ぶ．
- 最適化問題を応用して，企業の最適行動を導出できるようにする．
- マクローリン級数とテイラー級数を理解する．
- テイラー展開と線型近似を理解する．
- $n$ 次導関数テストを用いて関数の最大化，最小化の十分条件をテストできるようにする．

# 1 最適値と極値

(1) 「経済学」= ある特定の基準に照らして，利用可能な方法の中で最も優れたものを選ぶという選択の科学．

(2) ある特定の基準とは？

あるものを最大にするという目的 $\Longrightarrow$ 企業の利潤，消費者の効用など．

あるものを最小にするという目的 $\Longrightarrow$ 生産コスト，支出の最小化など．

(3) 最大値，最小値 $\Longrightarrow$ ＿＿＿＿＿＿ と呼ぶ．

ある関数の最大値を求めても，その関数がある目的を達成する行動を記述しているとは限らない．それは，問題設定者が関数にどのような意味付けを行ったかに依存する．数学上では，最大値や最小値は目的を最大にするとか最小にするといった最適性の意味が含まれていないため，単に極値と呼ぶ．

(4) 最適化問題

- Step 1．目的関数 (objective function) を設定する．

（例） $\max_{Q}.\quad \pi(Q) = R(Q) - C(Q)$

- Step 2. 目的関数を最大にするような選択変数（独立変数と同じ）の値を求める．

(5) 本章の最適化問題

1 変数のみの目的関数，$y = f(x)$，についてのみ考える．以後，$f(\cdot)$ は連続でかつ，連続な導関数を持つと仮定する．

# 2 相対的最大および最小 — 1 次導関数テスト

傾きゼロ $=$ その場所では停止の状態で，上昇または下降の傾向無し．

$\Rightarrow$ ____________ 点と呼ぶ．

**極値か変曲点の見分け方**

- 方法 1．停留点の前後の傾きをチェック．$\Longrightarrow$ こちらの方がスマート．
- 方法 2．停留点の前後の $y$ の値をチェック．

**p.276 例 1**

$y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 8$ の極値を求めよ．

## 課題

(1) テキスト pp.269–278 を読む．

(2) 練習問題 9.2 (p.278)，1–4．
問 4 のヒント．$T = \phi(x)$ を総関数とするなら，限界関数 $M$ は $M = dT/dx = \phi'(x)$．平均関数 $A$ は $A = T/x = \phi(x)/x$．

## 3　2 次および高次の導関数

停留点の前後の導関数の値を調べるのは煩雑．また，関数型が明示的に与えられていないとこの方法は使えない．ここでは，もっと体系的で汎用的な極値判別方法を考える．

- 極大，極小，変曲点，ともに 1 次導関数はゼロ．
  従って，「1 次導関数 = ゼロ」は極大，極小を見つけるのに十分ではない．

  ↑

  極大 or 極小であるための ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

- 十分条件を得るには，2 次導関数の符号を調べる必要がある．

## 導関数の導関数

2 次導関数 ＝ $f(x)$ を 2 回微分したもの．＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ と書く．

同様に高階の導関数が定義できる．

$$\left.\begin{array}{l} f'''(x),\ f''''(x) \\[2ex] \dfrac{d^3y}{dx^3},\ \dfrac{d^4y}{dx^4} \end{array}\right\} \text{など．}$$

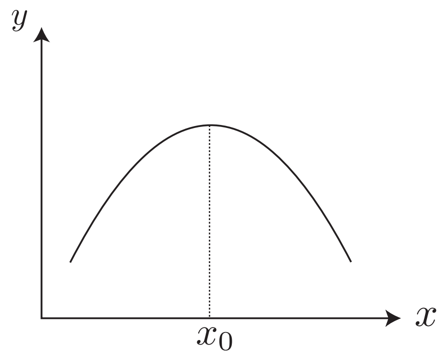
（例 1）$y = f(x) = 4x^4 - x^3 + 17x^2 + 3x - 1$ の 1 次から 5 次までの導関数を求めよ．

## 2 次導関数の解釈

$f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$　　　$x$ が変化したら $y$ がどのように変化するか．

$f''(x) = \dfrac{df'(x)}{dx}$　　　$x$ が変化したら ＿＿＿＿＿ がどのように変化するか．

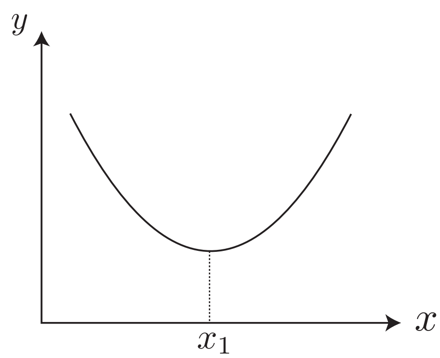
$x$ が変化したら ＿＿＿＿＿ がどのように変化するか．




$x < x_0$ の時　$f'(x)$ ＿＿＿ $0$　$f''(x)$ ＿＿＿ $0$

$x = x_0$ の時　$f'(x_0)$ ＿＿＿ $0$　$f''(x_0)$ ＿＿＿ $0$

$x > x_0$ の時　$f'(x)$ ＿＿＿ $0$　$f''(x)$ ＿＿＿ $0$




$x < x_0$ の時　$f'(x)$ ＿＿＿ $0$　$f''(x)$ ＿＿＿ $0$

$x = x_0$ の時　$f'(x_0)$ ＿＿＿ $0$　$f''(x_0)$ ＿＿＿ $0$

$x > x_0$ の時　$f'(x)$ ＿＿＿ $0$　$f''(x)$ ＿＿＿ $0$

## 課題

(1) テキスト pp.279–285 を読む.

(2) 練習問題 9.3 (p.285)，1–5.

# 4　2 次導関数テスト

(1) 相対的（局所的）な極値についての 2 次導関数テスト
関数 $f(x)$ が $x_0$ において，相対的な極値であるためには，

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{（必要条件 or 1 階の条件）}$$

さらに，

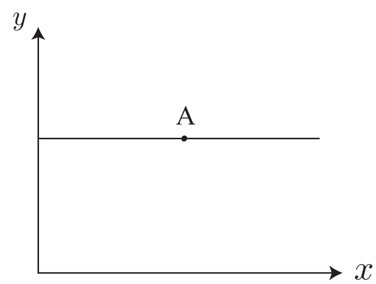
i)　もし，$f''(x_0) < 0$ であれば，$x_0$ で______

ii)　もし，$f''(x_0) > 0$ であれば，$x_0$ で______

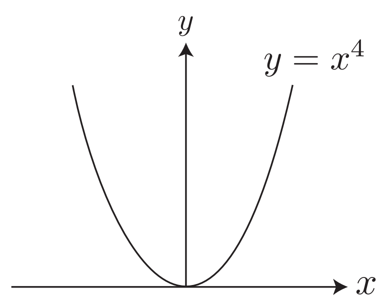
極大，極小の ______ 条件.

（ ______条件）

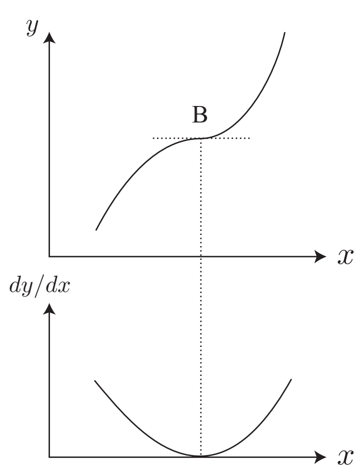
iii)　もし，$f''(x_0) = 0$ なら ______




A 点でも $f'(x) = 0$，$f''(x) = 0$．A 点は極大にも極小にもなり得る．




$f'(x) = 4x^3$，$f''(x) = 12x^2$．$x = 0$ で最小だが $f''(x) = 0$．




B 点では $f'(x) = 0$，$f''(x) = 0$．B 点は変曲点．

以上のように，$f''(x_0) = 0$ の場合，$x = x_0$ で極大，極小かは決定できない．この様な場合には，3 次ないしより高次の導関数を含む別のテストを用いなければならない．

(2) 絶対的（大域的）な極値について．

関数 $f(x)$ が $x_0$ において $f'(x_0) = 0$（必要条件 or 1 階の条件）ならば，

$$\left.\begin{array}{llll} \text{i)} & f''(x_0) < 0 \quad \text{for all } x & \Longrightarrow & x_0 \text{ で } \underline{\hspace{8cm}} \\ \text{ii)} & f''(x_0) > 0 \quad \text{for all } x & \Longrightarrow & x_0 \text{ で } \underline{\hspace{8cm}} \end{array}\right\} \text{十分条件.}$$

# 5　最適化問題の企業行動分析（ミクロ経済学）への応用

**企業の利潤最大化から供給曲線を導出する.**

(1) ステップ 1．目的関数を設定する．

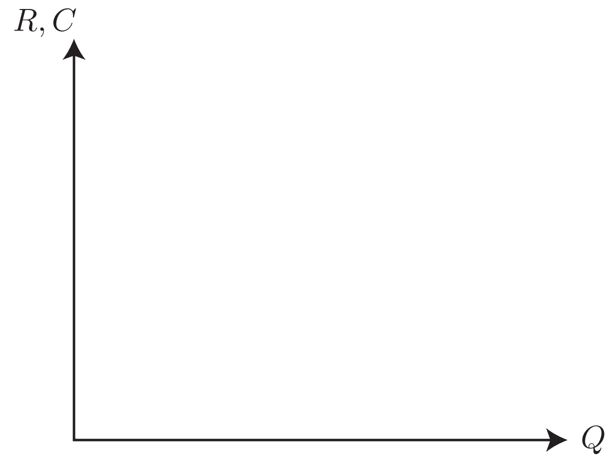
$$\begin{array}{rcl} \text{利潤} & = & \text{収入} \quad - \quad \text{費用} \\ \pi(Q) & = & P \cdot Q - C(Q) \end{array}$$

(2) ステップ 2．選択変数を決める．
$Q$．完全競争の下では $P$ は所与．

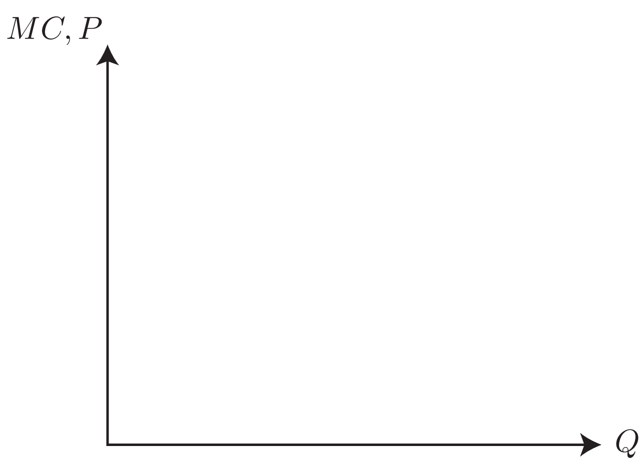
(3) ステップ 3．目的関数を選択変数で最大化する．

- 1 階の条件

- 2 階の条件（$P = MC$ では最大と最小の 2 通り考えられる）








(4) 補足

テキストでは，収入を $R = PQ$ というふうに線型で仮定せず，$R = R(Q)$ というふうに一般化している．この時，利潤最大化の一階条件は $MR = MC$ だが，$R(Q) = PQ$ の時には，$MR = R'(Q) = P$ となり，上で用いた例と同じ結果になる．

**独占企業の利潤最大化**

- 独占企業は価格をコントロールできる．(e.g. 生産量を減らして価格をつり上げるなど．)

| | | |
|---|---|---|
| 需要関数 | $Q = D(P)$ | 消費者の行動 |
| 逆需要関数 | $P = D^{-1}(Q)$ | 企業の生産量に応じて消費者が幾らの価格をつけるか． |

- 逆需要関数を $P = P(Q)$ とおき，独占企業の目的関数を設定する．

$\pi =$

- 1 階の条件 (f.o.c.)

したがって，収入 $P(Q)Q$ を完全競争の時と同様 $R$ とおけば，利潤最大化の条件は __________ となる．ただし，完全競争の時は $MR =$ ________ だったのに対し，独占市場の場合には $MR =$ ______________ である．いずれにしても，収入関数を特定化せず $R = R(Q)$ とおけば，完全競争・独占的競争市場のいずれのケースにおいても使える 1 階の条件を得ることが出来る．

$$\left.\begin{array}{l} P_m > P^* \\ Q_m < Q^* \end{array}\right\}$$ 独占企業は，完全競争時よりも生産量を減らし，価格を吊上げることによって，完全競争時よりも高い利潤を実現することが出来る．

## テキスト p.291 「物品税収入の最大化」のモデルの考察[1]

このモデルの企業は独占企業．したがって，テキストの

$$R = -\alpha Q^2 + \beta Q \qquad (\alpha, Q > 0)$$

は,「収入 $=$ 価格 $\times$ 供給量」に分解すると,

$$R = P(Q) \cdot Q = \underline{\hspace{6cm}}$$

で，逆需要関数 $P = P(Q)$ は， ________________ であることが分かる．この式は，

確かに右下がりの需要曲線の性質を満たしている．ちなみに，需要関数は， ________________

である．

[1] テキストの費用関数の右辺の $C$ は誤植で，正しくは小文字の $c$.

**費用関数についての補足（テキスト p.293）**

| | | |
|---|---|---|
| 短期の費用関数 | $C = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$ | 固定費用 $d > 0$ あり |
| 長期の費用関数 | $C_\ell = eQ^3 + fQ^2 + gQ$ | 固定費用なし |

$$\begin{aligned}\text{可変費用} &= \text{総費用} - \text{固定費用}\\ VC &= C(Q) - d\end{aligned}$$

$$\text{平均可変費用} \quad AVC = \frac{C(Q) - d}{Q}$$

## 課題

(1) テキスト pp.285–295 を読む.

(2) 練習問題 9.4 (p.295)，1–6.

# 6　マクローリン級数とテイラー級数

(1) 多項関数のマクローリン級数 (Maclaurian series)

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ を展開する.

$$\begin{cases} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} \\ f''(x) &= \\ f'''(x) &= \\ \quad\vdots & \\ f^{(n)}(x) &= \end{cases}$$

上の式をゼロで評価する．

$$\begin{cases} f'(0) & = \\ f''(0) & = \\ f'''(0) & = \\ \vdots & \\ f^{(n)}(0) & = \end{cases}$$

すなわち，

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad \cdots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

故に以下のマクローリン級数を得る．

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

展開に用いた導関数を $x = 0$ で評価しているので，「$x = 0$ で展開した」と言う．

**p.297 例 1**

$f(x) = 2 + 4x + 3x^2$ のマクローリン級数は？

(2) 多項関数のテイラー級数 (Taylor series)

- マクローリン級数は，多項関数を $x=0$ において展開した．
- 任意の点 $x_0$ において展開することも出来る $\Longrightarrow$ テイラー級数

分かり易いように，まず 2 次関数の展開を行う．

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

展開する任意の点を $x_0$ とおくと，変数 $x$ は $x_0$ からの乖離 $\delta$ を用いて，$x = x_0 + \delta$ と表すことが出来る．したがって，

$$\begin{cases} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 &= a_0 + a_1(x_0+\delta) + a_2(x_0+\delta)^2 \\ \\ f'(x) &= \\ \\ f''(x) &= \end{cases}$$

ここで，$x_0$ はある固定された値．したがって，$f(x)$ は $\delta$ の関数になる．つまり，$\delta$ が動くことによって，任意の $x$ が表され $f(x)$ が定義される．上の式を $\delta$ の関数として書き表すと，

$$\begin{cases} f(x) &\equiv g(\delta) &= a_0 + a_1(x_0+\delta) + a_2(x_0+\delta)^2 \\ \\ f'(x) &\equiv g'(\delta) &= a_1 + 2a_2(x_0+\delta) \\ \\ f''(x) &\equiv g''(\delta) &= 2a_2 \end{cases}$$

ここで，$g(\delta)$ を $\delta = 0$ でマクローリン級数に展開する．

$$g(\delta) =$$

**上式の考察**

(a) $x = x_0 + \delta$ と $\delta = 0$ より，$x = x_0$．したがって，

$$g(0) = f(x_0)$$
$$g'(0) = f'(x_0)$$
$$g''(0) = f''(x_0)$$

(b) 上式の $\delta$ は，$x = x_0 + \delta$ より，$\delta = x - x_0$

以上 2 点を考慮すると，$g(\delta)$ のマクローリン級数から以下を得る．

$$g(\delta) = f(x) =$$

これが，$f(x)$ を任意の点 $x_0$ で展開した時のテイラー級数．より一般的に $n$ 次式のテイラー級数は以下で表される．

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned}$$

**例題**

$f(x) = 2 + 4x + 3x^2$ を $x_0$ でテイラー展開し，$f(x)$ をテイラー級数で表しなさい．

(3) 任意の関数の展開

**テイラーの定理**

任意の関数 $\phi(x)$ は，$x = x_0$ において有限で連続的な導関数を必要な階数まで持てば，任意の定数 $n$ に関して，次のように展開できる．

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \left[\frac{\phi(x_0)}{0!} + \frac{\phi'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{\phi''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{\phi^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right] + R_n \\ &\equiv P_n + R_n\end{aligned}$$

ここで，$P_n$ は $n$ 次の多項式 (polynomial) で，$R_n$ は剰余項 (remainder) である．この式を「剰余項のあるテイラー級数」と呼ぶ．

考察

(a) $n$ 次の多項式 $P_n$ は $n+1$ 項から成る．

(b) $\phi(x)$ は，$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ の形の多項式である必要はない．

(c) $n$ が大きければ大きいほど，多くの項が $P_n$ に現れるため，$P_n$ や $R_n$ の値は $n$ に依存する．

(d) $\phi(x) = P_n + R_n$ は，$\phi(x)$ を $P_n$ で近似した場合，$R_n$ の誤差を伴うと考えられる．

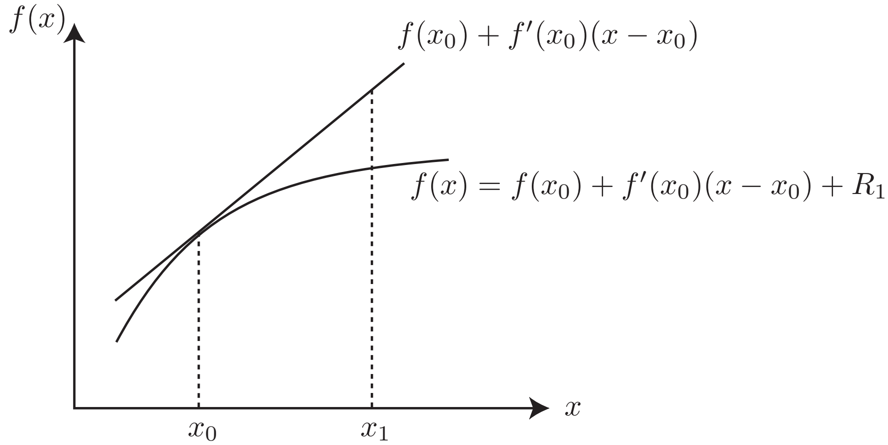
$$n = 1 \text{ の時} \implies \phi(x) = \phi(x_0) + \phi'(x_0)(x-x_0) + R_1$$
$$= P_1 + R_1 \qquad P_1 \text{ は 1 次式で，} \phi(x) \text{ の線型近似となる．}$$

$$n = 2 \text{ の時} \implies \phi(x) = \phi(x_0) + \phi'(x_0)(x-x_0) + \frac{\phi''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + R_2$$
$$= P_2 + R_2 \qquad P_2 \text{ は 2 次式で，} \phi(x) \text{ の 2 次近似となる．}$$

**例題**

先ほど $f(x) = 2 + 4x + 3x^2$ を $x_0$ でテイラー展開したが，この時の剰余項を求めなさい．次に，テイラー展開を 1 階の微分までで終わらせ，剰余項と合わせた形で書き表しなさい．

(4) 剰余項と線型近似の意味




(5) 剰余項のラグランジュ形式

剰余項 $R_n$ はテイラー展開において，$n+1$ 階以上の微分がゼロになるまでの項を全て含んだものであるが，ある定数 $p$ を用いて次の 1 項で必ず表現できる．

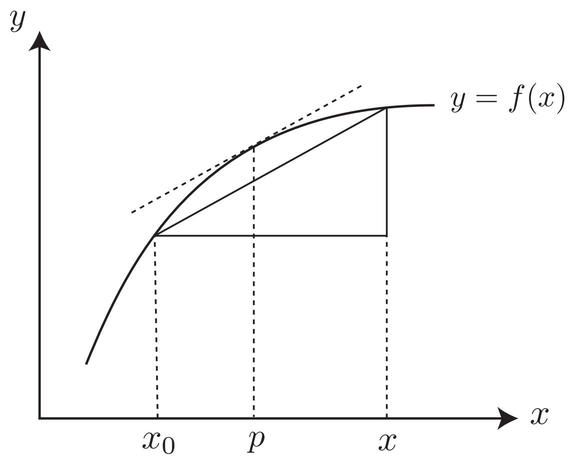
$$R_n = \frac{\phi^{(n+1)}(p)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

ただし，$p$ は導関数 $\phi^{(n+1)}$ を評価するある点で，$x$ と $x_0$ の間の値をとる．

考察

- 上の公式は，$R_n$ が右辺の形で書き表されると言っているだけで，$p$ の値の求め方は分からない．
- したがって，$R_n$ の具体的な値は求まらないが，$R_n$ の符号だけ知りたい時には，$n+1$ 階以上の非ゼロの微分係数からなる項を全て調べる必要がないため便利な形式である．
- $n = 0$ の簡単なケースを考えると，平均値の定理と同じ．

$$\begin{aligned} & \phi(x) = P_0 + R_0 = \phi(x_0) + \phi'(p)(x - x_0) \\ \leftrightarrow \quad & \phi(x) - \phi(x_0) = \phi'(p)(x - x_0) \\ \leftrightarrow \quad & \phi'(p) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$




## 課題

(1) テキスト pp.296–304 を読む．

(2) 練習問題 9.5 (p.304)，1–3.

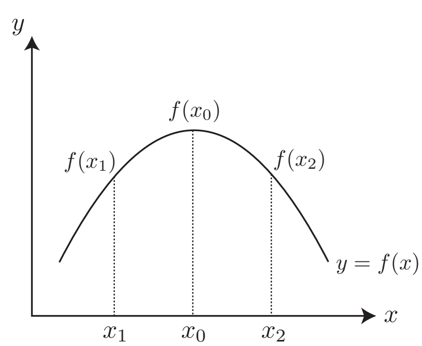
## 7　1 変数関数の相対的極値に関する $n$ 次導関数テスト

2 次導関数テストで 2 階の微分がゼロになった場合，極大 or 極小が判断できないと学んだ．テイラー級数を用いると，もっと高次の導関数テストを行うことが出来る．

(1) テイラー展開と相対的極値

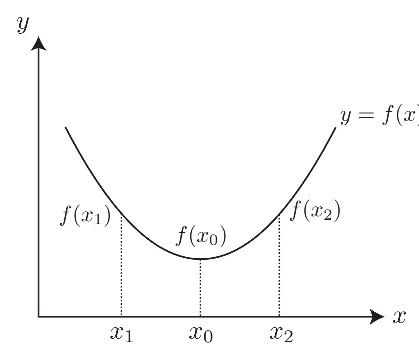
**定義: 相対的極値**

関数 $f(x)$ は $x_0$ の左右いずれの側であれ，それにごく近い $x$ の値に対して，
もし $f(x) - f(x_0)$ が負（正）であれば，$x_0$ で極大（極小）になる．




$x_0$ で極大のケース

$f(x) - f(x_0) < 0$




$x_0$ で極小のケース

$f(x) - f(x_0) > 0$

剰余項のラグランジュ形式を用いると，任意の関数 $f(x)$ に対して，$f(x)-f(x_0)$ は以下のように書き表せる．

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_0) &= f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &\quad +\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!}(x-x_0) \end{aligned}$$

この式を用いて $f(x)-f(x_0)$ の符号を確定できれば，上の相対的極値のグラフで示したように，極大・極小が判断できる．

(2) ある特定のケースにおける $n$ 次導関数テスト

**ケース 1**　$f'(x_0)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ 1 階のテストでは極値にならない！

1 階の導関数が剰余項になるように $n=$ ______ で展開する．

$f(x)=$

- $x$ は $x_0$ の近傍なので，$f'(x_0)$ と $f'(p)$ は同符号になり $f'(p)\neq 0$ が言える[2]．
- 右辺の符号は，$x$ が $x_0$ の右と左，すなわち，$x_1<x_0<x_2$ なる $x_1, x_2$ で変化する．

  $\Longrightarrow$ 左辺の符号も変化する．

  $\Longrightarrow$ 相対的極値ではない．(1 階のテストと同じ結果！)

**ケース 2**　$f'(x_0)=0;\ f''(x_0)\neq 0$

2 階の導関数が剰余項になるように $n=$ ______ で展開する．

$f(x)=$

[2] $n$ 次導関数テストは $x_0$ の近傍で行っているため，$x$ は $x_0$ の近傍にある．$p$ はその $x$ と $x_0$ の間にある．関数の連続性から，導関数 $f'(x_0)$ はその左側極限と右側極限が一致しなければならず，その近傍にある $f'(p)$ の符号も $x_0$ の左右で変化することなく $f'(x_0)$ と一致しなければならない．

$f''(p)$ と $f''(x_0)$ の符号は同じなので，

$$f(x)-f(x_0)<0 \quad \Longleftrightarrow \quad f''(x_0)\underline{\hspace{3em}}0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 \text{ で } \underline{\hspace{6em}}$$

$$f(x)-f(x_0)>0 \quad \Longleftrightarrow \quad f''(x_0)\underline{\hspace{3em}}0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 \text{ で } \underline{\hspace{6em}}$$

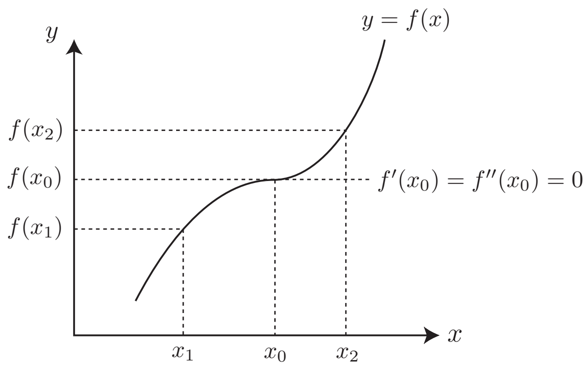
これは，$f'(x_0)=0$ の時の 2 次導関数テストと同じ．

**ケース 3**　　$f'(x_0)=f''(x_0)=0$．しかし，$f'''(x_0)\neq 0$

2 次導関数テストが使えない．

3 次導関数が剰余項になるように $n=\underline{\hspace{3em}}$ で展開する．

$f(x)=$




$f(x)-f(x_0)$ の符号が変化するので極値ではない．変曲点になる．

**ケース 4** $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$．しかし，$f^{(n)}(x_0) \neq 0$

$$f(x) - f(x_0) =$$

- $n$ が奇数なら，$x$ が $x_0$ の左か右かで $(x - x_0)^n$ の符号が変わる．$\Longrightarrow$ $x_0$ は変曲点.
- $n$ が偶数なら，$(x - x_0)^n$ は常に正．左辺の符号は，$f^{(n)}(x_0)$ と同じ符号になる．

$$f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \text{ で } \underline{\hspace{3cm}}$$

$$f^{(n)}(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \text{ で } \underline{\hspace{3cm}}$$

(3) $n$ 次導関数テスト

$f'(x_0) = 0$ となる停留点において，$x_0$ での最初の非ゼロの導関数が $n$ 次導関数 $f^{(n)}(x_0)$ であるならば，$f(x_0)$ の値を持つ停留点は，

(a) $n$ が偶数かつ $f^{(n)}(x_0) > 0$ なら極大.

(b) $n$ が偶数かつ $f^{(n)}(x_0) < 0$ なら極小.

(c) $n$ が奇数なら変曲点.

## 課題

(1) テキスト pp.305–309 を読む.

(2) 練習問題 9.6，1–2.