第 5 章 線型モデルと行列代数 II

市東 亘
shito@seinan-gu.ac.jp

平成 24 年 5 月 22 日

復習

- 線型方程式体系は，たとえそれがいかに大きくても簡潔な行列記号で書き表されることを学んだ．
- 方程式体系は，もし逆行列が存在するならば，係数行列の逆行列を用いて解くことが出来ることを学んだ．

本章の目的

- 逆行列の存在をどのようにして確かめるか，その方法を学ぶ．
- 逆行列の導出方法を学ぶ．

1 行列の非特異性のための条件

(1) 非特異性のための条件

必要条件　正方行列
必要十分条件　正方行列かつ行が 1 次独立．(列が 1 次独立でも同じ)

$$\text{行列が非特異} \iff \text{正方行列かつ行が 1 次独立}$$

$$\Uparrow$$

この条件の意味を考える．

行列が非特異なら逆行列が存在し，逆行列を用いて方程式の解を求めることが出来ると前章で学んだ．

方程式体系が一意の解を持つには

(a) 方程式の数と未知数の数が一致していないといけない $\iff$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

(b) 各方程式は互いに整合的でかつ関数的に独立．(第 3 章講義ノート P.5 参照)

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

i. $d_1 = 2d_2$ なら 2 つの式は ＿＿＿＿＿＿ だが ＿＿＿＿＿＿ ではなく事実上 ＿＿＿＿＿＿

例えば，$d_1 = 12$，$d_2 = 6$ で $10x_1 + 4x_2 = 12$ は ＿＿＿＿＿＿ の解を持つ.

ii. $d_1 \neq 2d_2$ なら 2 つの式は ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ .

例えば $10x_1 + 4x_2 = 12$ と $5x_1 + 2x_2 = 0$ は同時に成立しない.
なぜか？

まとめ

- 式の整合性 $\Longleftrightarrow$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ から構成されるベクトルの

＿＿＿＿＿＿＿＿ によって ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

が表せるということ.

- 関数的独立性 $\Longleftrightarrow$ ________________ から構成されるベクトルが

  ________________ になり，そのベクトルを基底に

  ______________________ を指す一意の到達経路がある

  （平行四辺形がただ 1 つ作れる）ということ．

$\Downarrow$

この時，逆行列が存在し，一意の解が得られる．

(2) 行列の階数 (rank)
階数: 1 次独立な行（または列）の最大の数

非特異行列 $\Longleftrightarrow$ ____

課題

(1) テキスト pp.105–110 を読む．

(2) 練習問題 5.1 全部．

2 行列式 (determinant) による非特異性の判定

逆行列を用いれば連立方程式の解を求めることができた．逆行列が存在するためには，非特異行列（正方行列かつ全ての行が 1 次独立）であればよかった．ある行列が非特異かどうかを調べるには，行列式 (determinant) を用いればよい．

(1) 行列式と非特異性

正方行列 A の行列式は $|A|$ で表され， __________________________________

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $|A| =$ ______________________

$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $|B| =$ ______________________

$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $|C| =$ ______________________

$D = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ $|D| =$ ______________________

1 次従属の場合，行列式は必ず ___________ になる．

(2) 行列式の幾何学的意味

(3) 3 次の行列式の計算

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(a) サラスの法則を用いる場合

※ この方法は簡便だが，3 次以下の行列式を求める場合にしか適用できない．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(b) ラプラス展開 (Laplace expansion) を用いる場合

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Cofactor（余因子）は，minor に適切な符号を付けたもの．

$|C_{ij}| \equiv$ ______________________________

$|C_{11}| =$ ______________________________

$|C_{12}| =$ ______________________________

$|C_{13}| =$ ______________________________

まとめ

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| \\ &= \sum_{j=1}^{3} a_{1j}|C_{1j}| \end{aligned}$$

ここでは，第 1 行の要素をもとに展開したが，これは，任意の行 or 列で展開することが出来る．

練習問題: 以下を展開して求めよ.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

(4) 3 次の行列式の幾何学的意味.

(5) n 次の行列式の計算

サラスの法則は 3 次の行列式までしか使えないが，ラプラス展開は，高次の行列式にも使える．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

(6) n 次の行列式の幾何学的意味

2 次元，3 次元で得られた結果をそのまま拡張すれば，n 個のベクトルが作る ________________ ________________ に等しいという解釈が出来る．そして，1 次従属なベクトルが含まれていると，その __________ が ________________ になることが予想される．

課題

(1) テキスト pp.110–116 を読む．

(2) 練習問題 5.2 1–4．

3 行列式の基本的諸性質

(1) 性質 I

行と列との交換は行列式の値に影響を与えない．$|A| = |A'|$

$\Longrightarrow$ 幾何学的には行ベクトル，列ベクトルいずれのベクトルで構成される ________________ も同じになるということ．

$\Longrightarrow$ ラプラス展開で ____ で展開しても ____ で展開しても同じ値を得る．

(2) 性質 III

任意の1つの行（あるいは1つの列）をスカラー k 倍すれば，行列式の値は k 倍になる．

$\Longrightarrow$ 幾何学的には，全てのベクトルのある軸の座標を k 倍すると，ベクトルで構成される

________________ も k 倍になるということ．

$\Longrightarrow$ 行や列で共通項 k でくくることによって，計算が簡略化される．

$$\begin{vmatrix} 28 & 63 & 21 \\ 32 & 53 & 17 \\ 4 & 23 & 9 \end{vmatrix} =$$

(3) 性質 IV

任意の行を何倍かしたものを他の行に加えても（から引いても）行列式の値は変わらない．この性質は列に関しても同様．

$$7 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 8 & 53 & 17 \\ 1 & 23 & 9 \end{vmatrix} =$$

(4) 性質 V

ある行（または列）が他の行（または列）倍数ならば，行列式の値はゼロである．もちろん，2 つの行（または列）同じならば，行列式の値はゼロになる．

この性質は，性質 IV から導かれるが，幾何学的にも明らか．すなわち，行または列が作る

ベクトルが同じ方向を向いており，________ がつぶれている状態を表している．

$\Longrightarrow$ ____________

(5) 行列式の非特異性の判定

A が $n \times n$ 行列で，$Ax = d$ が与えられた時，

$$|A| \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\hspace{6cm}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\hspace{6cm}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\hspace{6cm}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\hspace{6cm}}$$

課題

(1) テキスト pp.117–122 を読む．

(2) 練習問題 5.3 1–6.

4 逆行列の求め方

$$\left.\begin{array}{ll} & Ax = d \\ \leftrightarrow & \bar{x} = A^{-1}d \quad \text{（}A\text{ が非特異なら）}\end{array}\right\} \quad \text{逆行列 } A^{-1} \text{ をどのように求めるか？}$$

(1) 他要素の余因子による行列式の展開

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

第 1 行の要素と第 2 行の要素の余因子とで展開する．

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1j}|C_{2j}| = a_{11}|C_{21}| + a_{12}|C_{22}| + a_{13}|C_{23}|$$

$$=$$

性質 VI 他要素の余因子（「異なった」行または列の余因子）によって行列式を展開すれば常に 0 になる．

なぜゼロになるのか？

上の展開は $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ に等しい．つまり，必ず 1 次従属になる．

故に，$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|C_{i'j}| = 0 \quad (i \neq i') & i \text{ 番目の行と } i' \text{ 番目の行} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}|C_{ij'}| = 0 \quad (j \neq j') & j \text{ 番目の列と } j' \text{ 番目の列} \end{cases}$

(2) 逆行列の構築手順

(a) 与えられた行列が非特異かどうか調べる．

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

なら ________________ で非特異 $\Longrightarrow$ ________________

(b) 余因子行列 $C = (|C_{ij}|)$ を作る．

$$\underset{n\times n}{C} = \begin{pmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & \dots & |C_{1n}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & \dots & |C_{2n}| \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ |C_{n1}| & |C_{n2}| & \dots & |C_{nn}| \end{pmatrix}$$

(c) 余因子行列を転置させる．(adj A) the adjoint of A

$$\underset{n\times n}{C'} \equiv \text{adj } A \equiv$$

(d) AC' を求める．

$$\underset{n\times n}{AC'} =$$

(e) 上の結果より，

$$AC' = |A|I$$

故に $A^{-1} =$ ______________________________

練習問題: 上の手順で行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

課題

(1) テキスト pp.123–127 を読む．

(2) 練習問題 5.4 1–3．
問題 1 の日本語訳がおかしいので，原文を載せておきます．
Suppose that we expand a fourth-order determinant by its *third column* and the cofactors of the *second-column* elements. How would you write the resulting sum of products in $\sum$ notation? What will be the sum of products in $\sum$ notation if we expand it by the *second row* and the cofactors of the *fourth-row* elements?

5 クラメールの公式 (Cramer's rule)

(1) クラメールの公式の導出

$\underset{n\times n}{A}\ x = d$ の解 ____________________________________

$$\leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & \dots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \dots & |C_{n2}| \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ |C_{1n}| & |C_{2n}| & \dots & |C_{nn}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n d_i |C_{i1}| \\ \sum_{i=1}^n d_i |C_{i2}| \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n d_i |C_{in}| \end{pmatrix}$$

上の第 1 行に着目すると，$\bar{x}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^n d_i |C_{i1}|}{|A|}$. $|A|$ の第 1 列のラプラス展開は ____________________

$|A|$ の第 1 列を d_i で置き換えたものを $|A_1|$ とおくと，$|A_1| =$ ____________________ . した

がって，$\bar{x}_1 =$ ____________

同様に，

$\bar{x}_j =$

練習問題: 以下の連立方程式を Cramer's rule を使って解きなさい．次に逆行列を用いて解いて検算しなさい．

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 3x_2 &= 30 \\
6x_1 - 2x_2 &= 8
\end{aligned}
$$

課題

(1) テキスト pp.127–133 を読む．第 5.6 節は自習．

(2) 練習問題 5.5 の 1–3.

(3) 練習問題 5.7 の 1.

(4) p.132 の 2 財ミクロ経済モデルを行列を用いて解く．

6 静学分析の限界

モデルの内生変数の均衡値を求めるという静学均衡の議論．

$\Longrightarrow$ 均衡状態に到達する変数の調整過程や，再調整の過程を無視．最終的な到達点のみ問題にしてきた．

- 均衡点にのみ注目 = ____________________

  外生的な変化に反応して新しい均衡はどうなるのか？新しい均衡への調整過程は無視し，新しい到達点がどこかを見る．

  $\Longrightarrow$ ____________________

- 調整過程や，均衡の到達可能性（均衡の安定性）を議論 = ____________________

  均衡への到達過程（調整過程）において，外生的な変化が生じた場合，到達経路がどう変化するか？

  $\Longrightarrow$ ____________________

課題

(1) テキスト pp.144–145 を読む．