# 第 12 章 制約つき最適化

市東 亘
shito@seinan-gu.ac.jp

平成 25 年 7 月 26 日

前章までで複数の選択変数からなる最適化問題を解けるようになった．それらの最適化問題ではいずれも自由に選択変数を選ぶことが出来た．実際の経済問題では，選択変数を自由に選ぶことが出来ず，ある種の制約条件に従いながら選択変数を決定しなければならない事が多い．本章では，制約条件付きの最適化問題を解く方法を学ぶ．

## 本章の目的

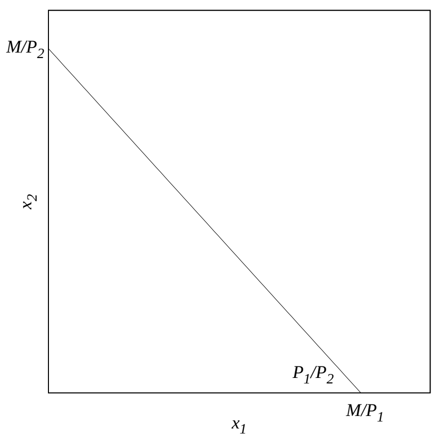
- 制約付き最適化の意味を理解する．
- 代入法とラグランジュ乗数法による解法を学ぶ．
- 縁つきヘシアンを用いた 2 階の条件を理解する．
- 凹関数と準凹関数，同次関数を理解する．
- 制約付き最適化を用いる経済モデルの比較静学を行う．

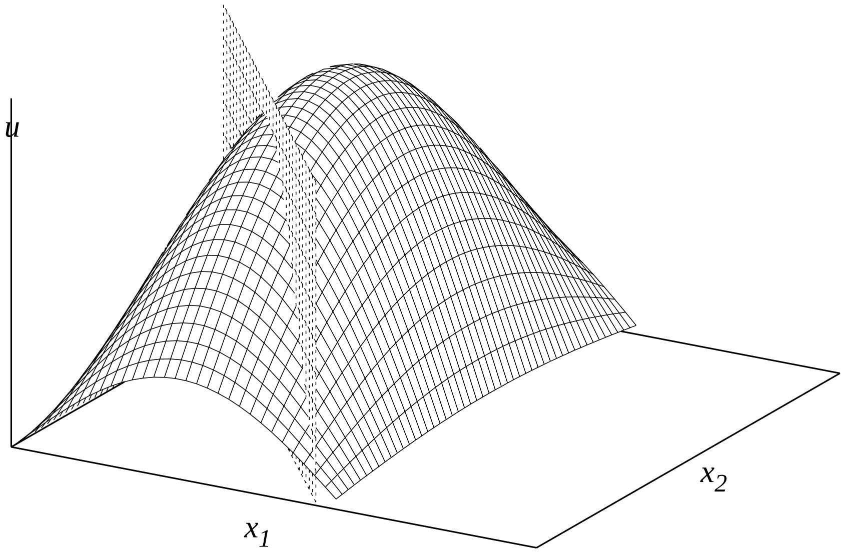
## 1 制約の効果

制約なし $\longrightarrow$ 選択変数を独立に（自由に）決められる．
制約あり $\longrightarrow$ 選択変数間に従属関係が生まれる．

$\Downarrow$

予算制約 $p_1x_1 + p_2x_2 \leq M$






留意点

- 制約付き極大（極小）が制約なしの極大（極小）を上回る（下回る）ことはない.
- 制約式を満たす点の集合が 1 点に退化するような制約をつけると極値の位置は自ずと決まってしまう.
  $\Longrightarrow$ 制約条件の数は選択変数の数より少なくしなければならない.

## 2 停留値の求め方

制約条件付き最適化問題の 2 つの解法.

(1) 代入法
目的関数に制約式を代入.
$\Longrightarrow$ 制約条件が目的関数に織込み済みとなり，制約式なしの最適化となる.

(例)
$$\begin{array}{ll} \max & u = x_1x_2 + 2x_1 \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 2x_2 = 60 \end{array}$$

代入法は，制約条件が陽関数で書き表せなければ使えない．

$$\begin{aligned} \max \quad & u = x_1x_2 + 2x_1 \\ \text{s.t.} \quad & F(x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

制約式を目的関数に代入出来ない！

(2) ラグランジュ乗数法

$$\left.\begin{aligned} \max \quad & u = x_1x_2 + 2x_1 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 2x_2 = 60 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \max \quad \mathscr{L} = x_1x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$$

$\lambda$: ラグランジュ乗数．$\mathscr{L}$: ラグランジュ関数
$\mathscr{L}$ を $x_1$，$x_2$，$\lambda$ について最大化する．

f.o.c.

※ 制約式の加え方を変えても解は同じ．

$$\max \quad \mathscr{L} = x_1x_2 + 2x_1 + \lambda(4x_1 + 2x_2 - 60)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= 4x_1 + 2x_2 - 60 = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= x_2 + 2 + 4\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= x_1 + 2\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= 8 \\ \bar{x}_2 &= 14 \\ \bar{\lambda} &= -4 \end{aligned}$$

$\bar{\lambda}$ の符号は変わるが，$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$ は同じ．

**ラグランジュ乗数法の一般形.**

$$\begin{aligned} \max \quad & z = f(x,y) \\ \text{s.t.} \quad & g(x,y) = c \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathscr{L} = f(x,y) + \lambda[c - g(x,y)]$$

$$\text{f.o.c.} \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= c - g(x,y) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= f_x - \lambda g_x = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= f_y - \lambda g_y = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} & g(x,y) = c \\ & \lambda = \frac{f_x}{g_x} \\ & \lambda = \frac{f_y}{g_y} \end{aligned}$$

- 1 番目の式より，$\mathscr{L}$ の最適解は元の問題の制約条件を自動的に満たすことになる.
- 上の一般形では制約式を $x$ や $y$ について明示的に解くことが出来ないため代入法が使えないが，ラグランジュ乗数法なら最適化条件を導出できる.

(練習) $\quad \max \quad z = x_1^2 + x_2^2$

$\quad\quad\quad\;\; \text{s.t.} \quad x_1 + 4x_2 = 2$

(3) 1 階の条件の考察.

(a) 制約なしの最適化のケース

$\max \quad z = f(x,y) \quad \Longrightarrow$ 全微分 $dz = 0$ で必要条件を得た.

$$dz = f_x dx + f_y dy = 0 \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

$$\Downarrow$$

$f_x = f_y = 0$ が必要条件.

(b) 制約ありの最適化のケース

制約があっても極値ではやはり $dz = 0$ であるべき．問題は，$dz = f_x dx + f_y dy = 0$ の $dx$，$dy$ がもはや自由に動けない点にある．

$\Downarrow$

$x$ と $y$ は $g(x, y) = c$ を満たすように動かさなければならない！

$\Downarrow$

制約式の両辺を全微分すれば，制約式を満たすような $dx$ と $dy$ を導き出せる．

$$g_x dx + g_y dy = 0 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

① ② 式を合わせると以下を得る．

$$f_x dx = -f_y dy$$
$$g_x dx = -g_y dy$$

辺々を割ると，

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \quad \text{を得る．}$$

これは，ラグランジュ乗数法で得られる $\lambda = \dfrac{f_x}{g_x}$，$\lambda = \dfrac{f_y}{g_y}$ を合わせたものに他ならない．結局，①式と②式より，目的関数の変化量がゼロになるような $x$ と $y$ の動かし方と，制約 $g(x, y)$ を一定に保つような $x$ と $y$ の動かし方を同時に考慮するのがラグランジュ乗数法である．

②式は $dg(x, y) = dc$ で $c$ を一定に保つように設定しただけであって，$c$ の水準については考慮していない．そのためラグランジュ乗数法の 1 階の条件では，もう 1 つの条件 $g(x, y) = c$ が必要になる．

まとめ

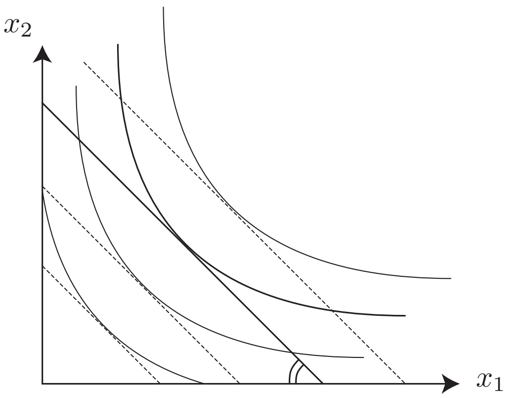
- ラグランジュ乗数は 2 つの傾きを等しくおくように調節する役割を果たす．

$$\begin{cases} \text{目的関数の等高線の傾き: } \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y} \\ \qquad \Longrightarrow \quad \text{目的関数の変化量がゼロになるような } x \text{ と } y \text{ の動かし方} \\ \text{制約式の傾き} = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{g_x}{g_y} \\ \qquad \Longrightarrow \quad \text{制約 } c \text{ を一定に保つような } x \text{ と } y \text{ の動かし方} \end{cases}$$

- 制約式の位置を $g(x, y) = c$ によって定める．

（例）消費者の効用最大化問題

$$\max_{x_1, x_2} \quad u = u(x_1, x_2)$$
$$\text{s.t.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = c$$




効用が最大になる点では予算制約線と無差別曲線が接する．

$\Longrightarrow$ 傾きが同じ．

- 予算制約線の傾き: ____________

- 無差別曲線の傾き: ____________

極値の必要条件は ________________ （制約式の傾き = 目的関数の等高線の傾き）．

この条件を満たす点は無数に存在する．

$\Downarrow$

________________ より位置が確定する．

※ ラグランジュ乗数法による 1 階の条件

(4) ラグランジュ乗数の意味

1 階の条件で得られるラグランジュ乗数の値は，制約式の定数項が 1 単位変化したとき，均衡におけるラグランジュ関数が何単位変化するかを表す．

$\Longrightarrow$ ________________

$\Longrightarrow$ ________________ since $\bar{\mathscr{L}} = \bar{z}$ at the equilibrium.

例えば，消費者の効用最大化問題では $\lambda$ は ________________________ を表す．

**証明**

1 階の条件式に陰関数定理が適用できれば，均衡値は $c$ の関数となる．

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= c - g(x,y) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= f_x - \lambda g_x = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= f_y - \lambda g_y = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}(c) \\ \bar{y} &= \bar{y}(c) \\ \bar{\lambda} &= \bar{\lambda}(c) \end{aligned}$$

陰関数定理が適用できるかどうかは，1 階の条件のヤコビ行列式が非ゼロであればよいが，これは 2 階の条件が成立する最適化問題では必ず成立する．

$$|J| =$$

1 階の条件はラグランジュ関数の 1 階微分であるから，「1 階の条件」のヤコビアンは 2 階微分となりラグランジュ関数のヘシアンと等しくなる

$$\bar{\mathscr{L}} = f(\bar{x}(c), \bar{y}(c)) + \bar{\lambda}(c)[c - g(\bar{x}(c), \bar{y}(c))]$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathscr{L}}}{dc} &= f_x \frac{d\bar{x}}{dc} + f_y \frac{d\bar{y}}{dc} + [c - g(\bar{x}, \bar{y})] \frac{d\bar{\lambda}}{dc} + \bar{\lambda} \left(1 - g_x \frac{d\bar{x}}{dc} - g_y \frac{d\bar{y}}{dc}\right) \\ &= (f_x - \bar{\lambda} g_x) \frac{d\bar{x}}{dc} + (f_y - \bar{\lambda} g_y) \frac{d\bar{y}}{dc} + [c - g(\bar{x}, \bar{y})] \frac{d\bar{\lambda}}{dc} + \bar{\lambda} \\ &= \bar{\lambda} \end{aligned}$$

(5) $n$ 変数と多数の制約がある場合

(a) 変数が $n$ 個，制約式が 1 つのケース．

$$\begin{aligned} \max \quad & z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad & g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathscr{L} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda[c - g(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$$

$$\text{f.o.c.} \qquad \begin{cases} \mathscr{L}_\lambda = c - g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \mathscr{L}_1 = f_1 - \lambda g_1 = 0 \\ \mathscr{L}_2 = f_2 - \lambda g_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathscr{L}_n = f_n - \lambda g_n = 0 \end{cases}$$

$(n+1)$ 本の 1 階の条件式から $(n+1)$ 個の内生変数が解ける．

(b) 変数が $n$ 個，制約式が 2 個のケース．

$$\begin{aligned} \max \quad & z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad & g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c \\ & h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathscr{L} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda[c - g(x_1, x_2, \cdots, x_n)] + \mu[d - h(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$$

$$\text{f.o.c.} \qquad \begin{cases} \mathscr{L}_\lambda = c - g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \mathscr{L}_\mu = d - h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \mathscr{L}_1 = f_1 - \lambda g_1 - \mu h_1 = 0 \\ \mathscr{L}_2 = f_2 - \lambda g_2 - \mu h_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathscr{L}_n = f_n - \lambda g_n - \mu h_n = 0 \end{cases}$$

$(n+2)$ 本の 1 階の条件式から $(n+2)$ 個の内生変数が解ける．

※ 制約式の数だけラグランジュ乗数を加えていけばよい．

# 課題

(1) テキスト pp.413–423 を読む．

(2) 練習問題 12.2 (p.423)，1–5．

## 3 2階の条件

制約付き最適化の 2 階の条件では縁つきヘシアン $|\bar{H}|$ を用いる．

$$\begin{aligned} \max \quad & z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad & g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c \end{aligned}$$

$$\mathscr{L} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda[c - g(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$$

の時，縁つきヘシアン $|\bar{H}|$ は以下で定義される．

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \cdots & \mathscr{L}_{1n} \\ g_2 & \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \cdots & \mathscr{L}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & \mathscr{L}_{n1} & \mathscr{L}_{n2} & \cdots & \mathscr{L}_{nn} \end{vmatrix}$$

縁つき首座小行列式．

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} \\ g_2 & \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} \end{vmatrix}, \qquad |\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \mathscr{L}_{13} \\ g_2 & \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \mathscr{L}_{23} \\ g_3 & \mathscr{L}_{31} & \mathscr{L}_{32} & \mathscr{L}_{33} \end{vmatrix}, \qquad \cdots\cdots\cdots, \qquad |\bar{H}_n| = |\bar{H}|$$

2 階の条件．

$$\left\{ \begin{array}{l} |\bar{H}_2| < 0,\ |\bar{H}_3| < 0,\ \cdots,\ |\bar{H}_n| < 0 \\ \\ |\bar{H}_2| > 0,\ |\bar{H}_3| < 0,\ |\bar{H}_4| > 0,\ \cdots \end{array} \right\} \iff dg = 0 \text{ の下で } d^2z \text{ は } \left\{ \begin{array}{l} \text{正値定符号} \\ \\ \text{負値定符号} \end{array} \right\}$$

※ 留意点

- 制約式のないヘシアンと比べると，$d^2z$ が正値定符号を取るときの条件が逆で縁付首座小行列式は全て負でなければならない．
- $|\bar{H}_1|$ の符号は常に負となるのでチェックする必要はない．
- $n$ 番目の縁つき首座小行列式は，$n$ 行 $n$ 列からなるラグランジュ関数の 2 階微分を要素にもつ行列式に，制約式の 1 階微分を縁付けしたもので，実際には $n+1$ 行 $n+1$ 列から成る．
- 縁のつけ方は左上方でも右下方でもよい（p.117 行列式の性質 II より）．

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & g_1 \\ \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad |\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \mathscr{L}_{13} & g_1 \\ \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \mathscr{L}_{23} & g_2 \\ \mathscr{L}_{31} & \mathscr{L}_{32} & \mathscr{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \cdots\cdots\cdots$$

この場合もやはり $|\bar{H}_1|$ の符号は負になることを確認せよ．

- 縁つきヘシアンはラグランジュ関数の 2 階微分から作られるヘシアンと結果的に等しい値を取る（p.118 行列式の性質 III 参照）.

$$|H|_{\mathscr{L}} = \begin{vmatrix} \mathscr{L}_{\lambda\lambda} & \mathscr{L}_{\lambda 1} & \mathscr{L}_{\lambda 2} & \dots & \mathscr{L}_{\lambda n} \\ \mathscr{L}_{1\lambda} & \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \dots & \mathscr{L}_{1n} \\ \mathscr{L}_{2\lambda} & \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \dots & \mathscr{L}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathscr{L}_{n\lambda} & \mathscr{L}_{n1} & \mathscr{L}_{n2} & \cdots & \mathscr{L}_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -g_1 & -g_2 & \dots & -g_n \\ -g_1 & \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \dots & \mathscr{L}_{1n} \\ -g_2 & \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \dots & \mathscr{L}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -g_n & \mathscr{L}_{n1} & \mathscr{L}_{n2} & \cdots & \mathscr{L}_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 0 & -g_1 & -g_2 & \dots & -g_n \\ g_1 & \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \dots & \mathscr{L}_{1n} \\ g_2 & \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \dots & \mathscr{L}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & \mathscr{L}_{n1} & \mathscr{L}_{n2} & \cdots & \mathscr{L}_{nn} \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ g_1 & \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \dots & \mathscr{L}_{1n} \\ g_2 & \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \dots & \mathscr{L}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & \mathscr{L}_{n1} & \mathscr{L}_{n2} & \cdots & \mathscr{L}_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= |\bar{H}|$$

### 縁つきヘシアンの意味

- $|H|_{\mathscr{L}} = |\bar{H}|$ だが，縁つきヘシアンによる 2 階の条件は，ラグランジュ関数の凹凸をテストしているわけではない.
- $|H|_{\mathscr{L}} = |\bar{H}|$ を用いて $d^2\mathscr{L}$ の符号をテストしたつもりでも，ラグランジュ乗数の微小変化に対するラグランジュ関数の変化は捉えておらず，ラグランジュ関数の形状を調べたことにはならない.
- なぜなら，極値では制約式が恒等的に成立しており，$\lambda$ の係数 $[c - g(x_1, \cdots, x_n)]$ は常にゼロ．したがって $d\lambda$ はラグランジュ関数に影響を与えないから.
- 縁つきヘシアンは,「制約式を満たすように選択変数を動かしたときの目的関数の形状をテストするもの」で．すなわち，
  (1) $dg = g_1dx_1 + g_2dx_2 + \cdots + g_ndx_n = dc = 0$ を満たすような $dx_i$ の下で目的関数の 2 次全微分 $d^2z$ を導出し 2 次形式を作成し，
  (2) 上で導出した $d^2z$ の 2 次形式の $dx_i$ を再び $g_1dx_1 + g_2dx_2 + \cdots + g_ndx_n = 0$ が成立するように制約をおいて $d^2z$ の符号をテストするものである.

### 制約つき極値のための条件のまとめ

$$\left.\begin{array}{rl} \max & z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \text{s.t.} & g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c \end{array}\right\} \mathscr{L} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda[c - g(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$$

| | 極大 | 極小 |
|---|---|---|
| 1 階 | $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 = \cdots = \mathscr{L}_n = 0$<br>（または $g = c$ の下で $dz = 0$） | $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 = \cdots = \mathscr{L}_n = 0$<br>（または $g = c$ の下で $dz = 0$） |
| 2 階 | $\lvert\bar{H}_2\rvert > 0$, $\lvert\bar{H}_3\rvert < 0$, $\lvert\bar{H}_4\rvert > 0$, $\cdots$<br>（または $dg = 0$ の下で $d^2z$ が負値定符号） | $\lvert\bar{H}_2\rvert < 0$, $\lvert\bar{H}_3\rvert < 0$, $\cdots$, $\lvert\bar{H}_n\rvert < 0$<br>（または $dg = 0$ の下で $d^2z$ が正値定符号） |

**制約条件が $m$ 個ある場合 $(m < n)$**

$\mathscr{L} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [c_j - g^j(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$

$$
|\bar{H}| = \begin{vmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \ldots & g_n^1 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^2 & g_2^2 & \ldots & g_n^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^m & g_2^m & \ldots & g_n^m \\
g_1^1 & g_1^2 & \ldots & g_1^m & \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \ldots & \mathscr{L}_{1n} \\
g_2^1 & g_2^2 & \ldots & g_2^m & \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \ldots & \mathscr{L}_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
g_n^1 & g_n^2 & \ldots & g_n^m & \mathscr{L}_{n1} & \mathscr{L}_{n2} & \ldots & \mathscr{L}_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$n - m$ 個の縁つき首座小行列式を用いる.

$$
|\bar{H}_{m+1}| = \begin{vmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \cdots & g_{m+1}^1 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^2 & g_2^2 & \cdots & g_{m+1}^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^m & g_2^m & \cdots & g_{m+1}^m \\
g_1^1 & g_1^2 & \ldots & g_1^m & \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \cdots & \mathscr{L}_{1(m+1)} \\
g_2^1 & g_2^2 & \ldots & g_2^m & \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \cdots & \mathscr{L}_{2(m+1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
g_{m+1}^1 & g_{m+1}^2 & \ldots & g_{m+1}^m & \mathscr{L}_{(m+1)1} & \mathscr{L}_{(m+1)2} & \cdots & \mathscr{L}_{(m+1)(m+1)}
\end{vmatrix},
$$

$$
|\bar{H}_{m+2}| = \begin{vmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \cdots & g_{m+1}^1 & g_{m+2}^1 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^2 & g_2^2 & \cdots & g_{m+1}^2 & g_{m+2}^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & g_1^m & g_2^m & \cdots & g_{m+1}^m & g_{m+2}^m \\
g_1^1 & g_1^2 & \ldots & g_1^m & \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \cdots & \mathscr{L}_{1(m+1)} & \mathscr{L}_{1(m+2)} \\
g_2^1 & g_2^2 & \ldots & g_2^m & \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \cdots & \mathscr{L}_{2(m+1)} & \mathscr{L}_{1(m+2)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
g_{m+1}^1 & g_{m+1}^2 & \ldots & g_{m+1}^m & \mathscr{L}_{(m+1)1} & \mathscr{L}_{(m+1)2} & \cdots & \mathscr{L}_{(m+1)(m+1)} & \mathscr{L}_{(m+1)(m+2)} \\
g_{m+2}^1 & g_{m+2}^2 & \ldots & g_{m+2}^m & \mathscr{L}_{(m+2)1} & \mathscr{L}_{(m+2)2} & \cdots & \mathscr{L}_{(m+2)(m+1)} & \mathscr{L}_{(m+2)(m+2)}
\end{vmatrix},
$$

$$\vdots$$

$|\bar{H}_n| = |\bar{H}|$

2 階の条件.

$$\left\{ \begin{array}{l} |\bar{H}_{m+1}| < 0,\ |\bar{H}_{m+2}| < 0,\ \cdots,\ |\bar{H}_n| < 0 \\ \\ |\bar{H}_{m+i}| \text{ の符号が } (-1)^{m+i} \text{ と同じ.} (i = 1, \cdots, n-m) \end{array} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \quad dg^j = 0, (j = 1, \cdots, m) \text{ の下で } d^2 z \text{ は } \left\{ \begin{array}{l} \text{正値定符号で極小} \\ \\ \text{負値定符号で極大} \end{array} \right\}$$

## 課題

(1) テキスト pp.424–433 を読む.

(2) 練習問題 12.3 (p.432)，1–4.

# 4 効用最大化と消費者需要

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1, x_2} & u = u(x_1, x_2), \qquad u_1 > 0, u_2 > 0 \\ \text{s.t.} & p_1 x_1 + p_2 x_2 = c \end{array}$$

(1) 1 階の条件は既に導出した通り.

$$\begin{cases} \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{u_1}{u_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = c \end{cases}$$

(2) 2 階の条件
f.o.c. が成立する極値で以下が満たされていれば $\bar{u}$ は最大.

(3) 準凹性と 2 階の条件

無差別曲線の傾き

$$
\begin{aligned}
& du = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 = 0 \\
\leftrightarrow \quad & \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_1}{u_2} = -\frac{u_1(x_1, x_2(x_1))}{u_2(x_1, x_2(x_1))} < 0
\end{aligned}
$$

無差別曲線の曲率（傾きの変化率）

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 x_2}{dx_1 dx_1} &= -\frac{\frac{du_1}{dx_1}u_2 - \frac{du_2}{dx_1}u_1}{u_2^2} \\
&= -\frac{\left(u_{11} + u_{12}\frac{dx_2}{dx_1}\right)u_2 - \left(u_{21} + u_{22}\frac{dx_2}{dx_1}\right)u_1}{u_2^2} \qquad \text{（ここに f.o.c. を代入）} \\
&= \frac{2p_1p_2u_{12} - p_2^2u_{11} - p_1^2u_{22}}{p_2^2u_2} = \frac{|\bar{H}|}{p_2^2u_2}
\end{aligned}
$$

$$
\text{故に} \qquad |\bar{H}| > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2x_2}{dx_1dx_1} > 0 \quad \text{since } u_2 > 0.
$$

$$
\Downarrow
$$

無差別曲線が原点に凸 = 効用関数が準凹関数

(4) 強い意味での凹の効用関数と準凹の効用関数

- 等高線の形状（独立変数からなる空間を見る）
  - 準凹関数: 原点に凸．等高線より大きな値方向に凹形.
  - 準凸関数: 原点に凹．等高線より大きな値方向に凸形.
- 関数の値の形状（従属変数方向の形状）
  - 凹関数: 原点に向かって凹.
  - 凸関数: 原点に向かって凸.

凹関数 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 準凹関数

(5) 比較静学 — 準備

(a) 効用最大化の 1 階の条件から内生変数の最適値が陰関数として表せるか確認.
陰関数で表せるためには，1 階の条件から作られるヤコビアンが非ゼロでなければならない.

$$F^1(\lambda, x_1, x_2) = c - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$
$$F^2(\lambda, x_1, x_2) = u_1 - \lambda p_1 = 0$$
$$F^3(\lambda, x_1, x_2) = u_2 - \lambda p_2 = 0$$

(b) 陰関数の導関数を導出するために 1 階の条件を全微分しておく.

(6) 比較静学 — 所得の変化

(7) 比較静学 — 価格の変化

ミクロ経済学のスルツキー方程式に対応．双対性を用いて導出する方が分かりやすい．
所得効果

$p_1$が 1 単位上昇 $\Rightarrow$ 実質所得は $-\bar{x}_1$変化 $\times$ 所得 1 単位あたりの需要変化量

(8) 比較静学 — 価格と所得の比例的変化

$p_1$，$p_2$，$c$ が全て同じ比率で変化したら?

$\Downarrow$

制約式は不変! $kp_1x_1 + kp_2x_2 = kc$

$\Downarrow$

需要関数は 0 次同次関数 $\bar{x}_i(p_1, p_2, c) = \bar{x}_i(kp_1, kp_2, kc)$.
すなわち，実質的な購買力が変化しない場合，合理的な消費者は反応を示さない．

(9) 同次関数

$r$ 次同次関数: $f(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n) = k^r f(x_1, x_2, \cdots, kx_n)$

# 5 今後の勉強のために

### 数学

- 『現代経済学の数学基礎（下）』，A.C. チャン，シーエーピー出版
- 『経済理論における最適化』，アヴィナッシュ・ディキシット，勁草書房.
- 『動学的最適化の基礎』，A.C. チャン，シーエーピー出版.
- 『解析入門』，田島一郎，岩波全書.
- 『線形代数とその応用』，G. ストラング，産業図書.

### ミクロ経済学

- 『ミクロ経済学』，西村和雄，東洋経済新報社.
- 『ミクロ経済学』，武隈慎一，新世社.

### マクロ経済学

- 『マクロ経済学』，齊藤誠，岩本康志 他，有斐閣.
- 『金融』，小野善康，岩波書店.
- 『新しいマクロ経済学』，斎藤誠，有斐閣.

### 計量経済学

- 『入門 経済のための統計学』，加納悟, 浅子和美，日本評論社.
- “Learning and Practicing Econometrics”, Griffiths & Hill & Judge, Wiley.