第4章 線型モデルと行列代数

市東 亘
shito@seinan-gu.ac.jp

平成27年4月14日

本章の目的

- 行列とベクトルを理解する．
- 行列とベクトルの演算方法を理解する．
- ベクトルを視覚的にイメージ出来るようにする．

行列を用いる利点

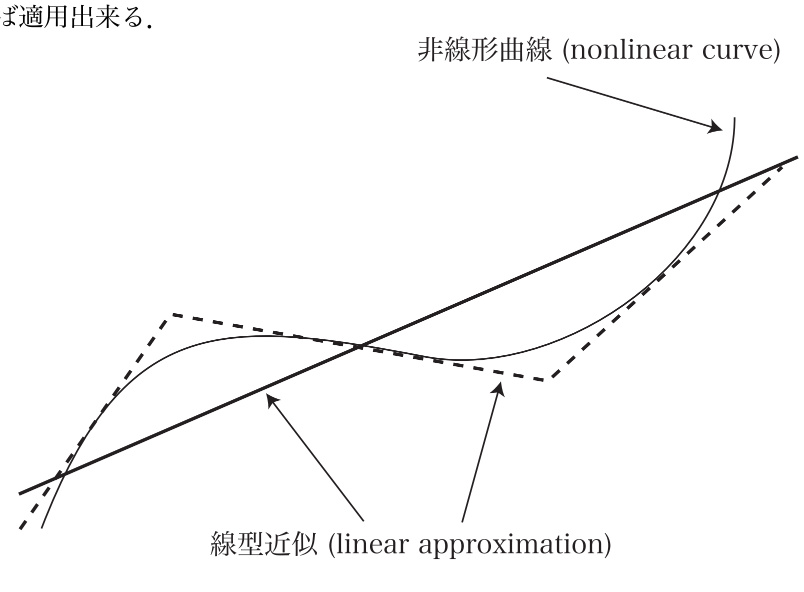
(1) 2元以上の方程式体系を簡潔に表すことが出来る．

(2) 行列式を用いて解の存在をテストすることが出来る．

(3) 2元以上の方程式体系でも，行列を使わない場合に比べ解を容易に得ることが出来る．

経済学では次元の大きな方程式体系が頻繁に現れる．従って行列代数もよく用いられる．後のほとんどの章で行なわれる分析の基礎になるものだからしっかり身に付けること．

（注）行列代数は線型方程式体系のみに適用可能．非線形の方程式体系に対しては，線型近似すれば適用出来る．



1 行列とベクトル (Matrix and Vector)

(1) 行列とは？
矩形（長方形）状に数字などの要素を並べたもの.

(2) 行列の表記方法

- 2 次元の線型方程式体系

$$\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ 9x - 3y = 8 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

連立方程式体系を__________，__________，__________ の 3 つのグループに分けて，それぞれを行列として表記する.

係数から成る行列を______________________________ と呼ぶ.

- 一般的な方程式体系

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & d_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & d_m \end{array}$$

問題

(a) 上の方程式体系の変数の数は幾つか？(変数は x で与えられている.)
(b) 方程式の数は幾つか？
(c) ２次元の例に倣って行列で書き表しなさい.

$A =$ $\qquad$ $x =$ $\qquad$ $d =$

とおくと，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ と簡単に方程式体系を記述することが出来る．

- 係数行列 A はさらに簡単に以下のように書くことも出来る．

$$A = (a_{ij}) \quad (i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n)$$

行 (row) 列 (column)

- 上の $A = (a_{ij})$ で i と j のうち，それぞれどちらが行でどちらが列か？

- 行列は「縦 × 横」でその大きさを表す．上の a_{ij} は＿＿＿＿＿ 行列である．または，

＿＿＿＿＿ 次元の行列であるという．

- $m = n$ で正方形の形をした行列を＿＿＿＿＿ という．

(3) 行ベクトルと列ベクトル

- 列ベクトル (column vector): 縦に1 列に並んだ行列

(例)

- 行ベクトル (row vector): 横に1 列に並んだ行列

(例)

- ベクトルとは？

  ベクトルとは大きさと方向を持つ量．大きさだけならば 1 つの数値でよいが，方向を持つ為には幾つかの数値を 1 組みとして座標を表さなければならない．原点を始点とし，行ベクトルや列ベクトルで与えられる n 個の要素を終点の座標とすることで，大きさと方向を表すことが出来る．

  $$\Downarrow$$

  n 個の要素を持つ列または行ベクトルは（これ以降 n–ベクトルと呼ぶ）は，n 次元空間（n–空間）における 1 点と見なされる．

- 通常，ベクトルを表す為に単に変数（x や d など）を用いた場合，それは________________ を表す．

- ________________ を表すには，x' や d' とプライムを付ける．このプライムは

  ______________ であることを示す．

- ______________ とは，列と行を入れ替えた行列．

$$\underset{2\times 2}{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

$$\underset{m\times 1}{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

(4) 行列代数の必要性

連立 1 次方程式における $Ax = d$ という簡便な表記法は少なくとも 2 つの問題を提起する．

(a) 2 つの行列 A および x を如何に掛け合わせるのか．

(b) Ax と d とが等しいとは何を意味するのか．

行列は括弧内の数全体を含んでいるため，1 つの数について定義された通常の代数演算は直接適用出来ない．したがって，新しい種類の代数が必要になる．

$$\Downarrow$$

行列代数 (Matrix Algebra)

課題

(1) テキスト pp.65–69 を読む.

(2) 練習問題 4.1 (p.69) の 1 と 2.

2 行列の代数

(1) 等しい行列

$A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ のとき，

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \qquad \text{for all } i \text{ and } j.$$

つまり，次元が同じく，全ての要素も等しい場合.

（例）

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ なら，$x =$__________，$y =$__________ .

(2) 行列の加減

- 同じ次元の行列のみ同士，加減が出来る.
- 加減は対応する要素同士で行なう.

（例）

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}} + \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}} =$$

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}} - \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}} =$$

(3) スカラー倍

スカラー（数）を行列に掛ける $\Longrightarrow$ 行列の全ての要素にそのスカラーを掛ける

（例）

$$7\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

(4) 行列の積

- 行列の積 AB は，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ の時のみ定義できる．

  この時，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ になる．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

(5) 行列の割り算の問題

行列では，数と異なり，割り算が出来ない．割り算に似た演算として逆行列があるが，それは後で学習する．

(6) $\sum$ 記号について

足し算を示す簡単な方法:　$x_1 + x_2 + x_3 = \sum_{j=1}^{3} x_j$

Quiz

(a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} y_i =$

(b) $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 =$

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_j x_j =$

(d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i =$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} a x_k = a \sum_{k=1}^{3} x_k$ を証明せよ．

- 特に加算の範囲を明示する必要がない時や，明示しなくても明らかな場合，$\sum x_i$ や $\sum_i x_i$ と書く．
- シグマを用いると行列の積を簡単に定義することが出来る．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

の時，

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj} \qquad (i = 1, 2,\ j = 1, 2)$$

実際に書き下してみよう．

$c_{11} =$

$c_{12} =$

$c_{21} =$

$c_{22} =$

課題

(1) テキスト pp.70–78 を読む．

(2) 練習問題 4.2 の 1–7．

3 ベクトルの代数について

(1) ベクトルの積

ベクトルも行列の一種に過ぎないので同じくヨタで掛ける．

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$u'v =$

$uv' =$

(2) ベクトル演算の幾何学的解釈

ここでは 2 次元のケースのみ扱う．n ベクトルなら n 次元空間になる．

(a) ベクトル $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ or $u' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$ の幾何学的表現

u も u' も全く同じ順序対．原点 (0, 0) から u or u' の順序対を 2 次元の座標にとった点 (3, 2) へ 1 本の矢（方向を持った線分）を描けば，それは原点から点 u へ到達する唯一の直線経路を示すことになる．

(b) ベクトルのスカラー積

(c) ベクトルの加減 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ベクトルの和

$u + v =$

ベクトルの差

$v - u =$

(d) ベクトルの 1 次結合（1 次の和あるいは差）

$$3v + 2u = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

※ 任意の項を持つ 1 次結合も同様に，最初の 2 項を足し，それにまた次の項を足していけば作図できる．

$$\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$$

ただし，k_i はスカラー，v_i はベクトル．

(3) 1 次従属 (linearly dependent) と 1 次独立 (linearly independent)

> **定義 1** ベクトル $v_1, \cdots, v_n$ は，それらのうちの 1 つが残りのベクトルの 1 次結合として表されるとき，(そしてその時のみ)，1 次従属と呼ばれる．そうでない時は，1 次独立と呼ばれる．

（例）次の 3 つのベクトルは 1 次従属．$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$，$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$，$v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

1 次従属なら，必ず残りのベクトルの 1 次結合で表される為，

$$\begin{aligned} & 3v_1 - 2v_2 = v_3 \\ \leftrightarrow \quad & 3v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \quad \text{（ただし，0 は} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}' \text{のゼロベクトル.）} \end{aligned}$$

と書ける．これにより，1 次従属と 1 次独立を以下のように再定義できる

> **定義 2** m 次元のベクトル $v_1, \cdots, v_n$ は $\sum_{i=0}^{n} k_i v_i = 0_{m\times 1}$ を満たすような，全てがゼロとなることのない 1 組のスカラー $k_1, \cdots, k_n$ が存在する時，そしてその時のみ 1 次従属である．他方，全ての i について $k_i = 0$ である時のみ上式が満たされるならば，これらのベクトルは 1 次独立である．

(4) 1 次従属の幾何学的説明

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

上のいずれのケースも一方が他方の_______________．2 つのベクトルは__________________
$\Longrightarrow$ 幾何学的にも明らかに従属的.

(5) 1 次独立の幾何学的説明

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

上の v_1 と v_2 を 1 次結合で表せば，平行四辺形を作って平面上の任意の点を指示することが出来る．

$$\Downarrow$$

> **命題** 2 次元空間において 2 つの 1 次独立なベクトルが見つかれば，その空間における他の全てのベクトルはこれらの 1 次結合として表される．

$$\Downarrow$$

2 次元ベクトルが 3 つ以上ある時，1 次独立になり得るのはそのうちの________ つまで．残りのベクトルは，必ずその________ つのベクトルの 1 次結合で表されるから．

(6) ベクトル空間

(a) 2 つの独立なベクトル u および v の 1 次結合によって作られた 2 次元ベクトルの全体は ________________________________ と呼ばれる．

- 1 つのベクトルでは__________ しか表せない．
- 2 次元空間を作る（張る）のに________ つ以上のベクトルはいらない．
- 2 つの 1 次独立なベクトル u と v は，2 次元空間を張るといい，それらは 2 次元空間の **1 つの**____________ をなす．
- 1 つの__________ であって，__________ の全体ではない．なぜなら，2 次元ベクトルのいかなる対も，それらが 1 次独立である限りは__________ になり得るから．
- 特に 2 つのベクトル，____________ と____________ を考えてみよう．これらは______________ なので 1 つの____________ になり得る．2 次元のグラフの____________ と____________ は，これら 2 つのベクトルの延長に過ぎない．そしてグラフでは，2 次元空間は事実上これら 2 つの軸によって張られたものとして扱われている．

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ のように，i 番目の成分が 1 でそれ以外の成分が 0 であるベクトルを＿＿＿＿＿ ベクトルと呼ぶ．

(b) 同様に，3次元ベクトル空間は，3次元ベクトルの全体であり，3つの＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿な 3 次元ベクトルによって張られる（p.87　第 4.4 図参照）.

(c) n-空間への拡張も同様で，n-空間は，n-ベクトルの全体として定義される．幾何学的には描けないが，n-空間は，全てが 1 次独立な（n 個の要素を持つ）n 個の単位ベクトルの全体によって張られるものとして考えられる．

課題

(1) テキスト pp.79–88 を読む．

(2) 練習問題 4.3 の 1–6 (p.89).

4 可換法則，結合法則および分配法則

	数 a，b について以下が成立	行列 A，B について以下が成立
加法の可換法則:	$a+b=b+a$	
乗法の可換法則:	$ab=ba$	
加法の結合法則:	$(a+b)+c=a+(b+c)$	
乗法の結合法則:	$(ab)c=a(bc)$	
分配法則:	$a(b+c)=ab+ac$	

課題

(1) テキスト pp.90–93 を読む．

(2) 練習問題 4.4 の 1–5.

5 単位行列と零行列

(1) 単位行列 (Identity Matrices)

__________ が 1 で残りの要素が________ の________ 行列

$\underset{2\times 2}{I} =$ $\underset{3\times 3}{I} =$

$\underset{4\times 4}{I} =$

- 単位行列は数字の 1 と似ている

$$1 \times a = a \times 1 = a$$

$$IA = AI = A$$

（例） $\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の時,

$\underset{2\times 2}{I}\,\underset{2\times 3}{A} =$

$\underset{2\times 3}{A}\,\underset{3\times 3}{I} =$

- $\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times n}{I}\,\underset{n\times p}{B} =$

- $(I)^2 =$

(2) 零行列 (Null Matrices)

要素が全てゼロ．正方行列である必要はない．

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{O} = \underset{m\times n}{O} + \underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{A}$
- $\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times p}{O} = \underset{m\times p}{O}$ および $\underset{q\times m}{O}\,\underset{m\times n}{A} = \underset{q\times n}{O}$

(3) 行列代数の特質

- 数の場合，$ab = 0$ なら a か b がゼロ．

  行列の場合，$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$

- 数の場合，$cd = ce$ なら $d = e$（ただし $c \neq 0$ とする）．

  行列の場合，$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$， $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$， $E = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，

  $CD =$ $CE =$

  より，________________ であっても______________________

課題

(1) テキスト pp.94–96 を読む．

(2) 練習問題 4.5 の 1–3．

6 転置行列と逆行列

(1) 転置行列 (transposed matrices)

________ と________ を入れ替えたもの．

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ $A' = A^T =$

$\underset{m\times n}{B}$ なら $B'_{n\times m}$

(2) 転置行列の性質

$(A')' =$ __________

$(A+B)' =$ _______________

$(AB)' =$ _______________

(3) 逆行列とその性質 (inverse matrices)

- A の逆行列を__________ と表す．
- $AA^{-1} = A^{-1}A =$ ________

  前後どちらから乗じても____________________ になる．数の割り算に似ている．
- A の逆行列は A が__________ 行列の時のみ定義される．しかし，全ての__________ 行列が逆行列を持つとは限らない．

  （________ であることは逆行列が存在する為の必要条件であり，十分条件ではない．）

  __________ 行列が逆行列を持つ $\iff$ A は__________________________

  __________ 行列が逆行列を持たない $\iff$ A は__________________________
- 逆行列の逆行列は元の行列
  $(A^{-1})^{-1} = A$
- A が $n \times n$ なら A^{-1} も $n \times n$.
- もし逆行列が存在すれば，それは一意的である．
- $(AB)^{-1} =$_______________
- $(A')^{-1} =$_______________

(4) 逆行列と線型方程式体系の解

$$\underset{(n\times n)}{A}\;\underset{(n\times 1)}{x} = \underset{(n\times 1)}{d}$$

課題

(1) テキスト pp.97–103 を読む.

(2) 練習問題 4.6 の 1–5.