

入門経済数学 後期期末試験

担当 市東 亘

2000 年 1 月 25 日第 2 限 (11:00—12:00)

受験上の注意

- 解答用紙が配られたら，直ちに学生番号および氏名を記入すること．
- 開始の合図があるまで，問題用紙は伏せておくこと．
- 本試験では途中退出を禁止する．
- 試験終了後は，自分の解答用紙を一番上にのせ，前に解答用紙をまわすこと．
- 解答用紙をのせる順番を間違えると，評価の対象にならないことがあるので特に注意すること．
- 解答用紙の回収が全て終わり，試験監督者が退出の指示を出すまで，座席にて待機すること．
- 不正行為は絶対にしないこと．不正行為を行った場合，未遂，頻度の多少に関わらず，今年度の全ての単位が無効となる．
- 特に，解答用紙回収時に不正行為がないか，各自とも周囲の者の行動に注意し，見かけた場合は試験後すみやかに報告すること．

制限時間 60 分，110 点満点．（うち，10 点は最終評価ではボーナス点扱いにする．）

1．独占的に 2 つの財を供給する企業の利潤最大化行動に関する以下の文章を読み設問 (1)―(2) に答えなさい．

「おもちゃのパンダイ」という会社が「ママゴッチ」と「ファーボー」というおもちゃを開発した．ママゴッチもファーボーも，全く新しいタイプのおもちゃなので競合商品はない．したがって，おもちゃのパンダイはこれら 2 つの商品を独占的に供給することができる．おもちゃのパンダイは，これらの商品をどれだけ生産すればよいのか考えてみよう．なおここでは，分析を容易にするため，生産したものは全て供給され売れ残りはないと仮定する．

おもちゃのパンダイは，この 2 つの商品を独占的に供給できるため，供給量を調整して価格を吊上げるなどの価格操作が可能である．そのために，まず市場調査を行い，この 2 つの製品に対してどれくらいの需要があるのかを調べた．その結果，それぞれの製品に対し以下の需要関数を得た．

$$Q_1 = a_0^2 - a_1 P_1 - a_2 P_2 \quad (1)$$

$$Q_2 = b_0^{\frac{1}{2}} - b_1 P_1 - b_2 P_2 \quad (2)$$

ただし, Q_1, P_1 はそれぞれママゴッチの需要量と価格を表し, Q_2, P_2 はファーボーの需要量と価格を表している. また, $a_i, b_i, (i = 0, 1, 2)$ は正の定数である.

上の二つの需要関数から分かる点は, 消費者にとってママゴッチとファーボーは互いに ア 財であることが分かる. なぜなら, 一方の製品の価格が上昇するともう一方の製品の需要は イ するからである. これは, ママゴッチがファーボーと交信することによって楽しむ携帯端末型おもちゃであることを考慮すると自然な帰結である.

おもちゃのパンダイは, ママゴッチとファーボーを生産すると, その生産量に応じて費用, C が以下のようにかかる.

$$C = 2Q_1^2 + Q_1 Q_2 + 2Q_2^2 \quad (3)$$

おもちゃのパンダイにとって最適な供給量とは, 利潤を最大にする供給量である. 利潤は, 収入から費用を引いたものであるから, おもちゃのパンダイの利潤, π は次のようになる.

$$\pi = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - (2Q_1^2 + Q_1 Q_2 + 2Q_2^2) \quad (4)$$

おもちゃのパンダイは, それぞれの商品を独占的に供給するため, 価格, $P_i, (i = 1, 2)$ は所与ではなく, コントロールすることができることを思い出そう. どのくらいの量を生産をすると, どのくらいの価格で消費者が購入するかは, 需要関数を用いて計算することができる. つまり, ウ 関数を求めるのである. それには, (1) 式と (2) 式を P_1 と P_2 について解いてやればよい. (1) 式と (2) 式を行列で書くと,

$$\begin{pmatrix} \text{エ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{オ} \end{pmatrix} \quad (5)$$

クラメールの公式を用いて, $P_i, (i = 1, 2)$ について解くと,

$$P_1 = \frac{\begin{vmatrix} \text{カ} \\ \text{エ} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{キ} \\ \text{ク} \end{vmatrix}} = \frac{\text{キ}}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (6)$$

$$P_2 = \frac{\begin{vmatrix} \text{ケ} \\ \text{エ} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{キ} \\ \text{ク} \end{vmatrix}} = \frac{\text{ケ}}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (7)$$

を得る. $a_i, b_i, (i = 0, 1, 2)$ が定数であることを考慮すると, (6) 式と (7) 式より価格, $P_i, (i = 1, 2)$ は, それぞれ Q_1, Q_2 の関数になることが分かる. したがって, おもちゃのパンダイが最大化したい利潤, π は, 以下のように書き表すことができる.

$$\pi = P_1(Q_1, Q_2)Q_1 + P_2(Q_1, Q_2)Q_2 - C(Q_1, Q_2) \quad (8)$$

結局, 利潤関数, π は Q_1 と Q_2 のみの関数になる. いま, $\pi = \pi(Q_1, Q_2)$ であることを考慮し, これを全微分すると,

$$d\pi = \text{コ} dQ_1 + \text{サ} dQ_2 \quad (9)$$

を得る. 利潤最大化点は停留点であるため, $d\pi = \text{シ}$ である. したがって, 利潤が最大化された点では, $Q_i, (i = 1, 2)$ がいかなる方向へ微少変化しようとも, (9) 式の両辺は シ でなければならない. それには コ と サ が シ であればよい. これが一階の条件である. すなわち以下を得る.

$$\text{コ} = \frac{\partial P_1}{\partial Q_1} Q_1 + \text{ス} = \text{シ} \quad (10)$$

$$\text{サ} = \frac{\partial P_1}{\partial Q_2} Q_1 + \text{セ} = \text{シ} \quad (11)$$

上の (10) 式と (11) 式を同時に満たす, Q_1^*, Q_2^* が, おもちゃのパンダイの最適生産量である。つまり, (10) 式と (11) 式の連立方程式を解けばよい。ここで, これ以降, $a_1 = 5, a_2 = 2, b_1 = 2, b_2 = 1$ であると仮定すると, 求める解は,

$$Q_1^* = \frac{1}{75} (\text{ソ} - 13 b_0^{\frac{1}{2}}) \quad (12)$$

$$Q_2^* = \frac{1}{25} (-3 a_0^2 + \text{タ}) \quad (13)$$

である。

先ほど, (9) 式を用いて, 停留点では $d\pi = \text{シ}$ であることを利用し 1 階の条件を求めた。(1) しかし, 停留点のこの条件を満たす点は, 最大値の他にも 3 種類存在する。最大値を他の 3 つの種類の停留点と区別するには, 2 次導関数テストを行う必要がある。

2 階の条件。最大値においては, π の変化量 $d\pi$ は Q_i , ($i = 1, 2$) の微小変化によって チ する。したがって, $d\pi$ の変化量 $d(d\pi) = d^2\pi$ の符号は, ツ でなければならない。これは, π の 2 次全微分が テ 定符号であることにほかならない。これをチェックするには, ト 行列式を用いる。 ト 行列式を $|D|$, 1 つ目の首座小行列式を $|D_1|$ とおくと, $d^2\pi$ が テ 定符号であるための条件は, ナ である。実際に計算すると, $|D_1| = \text{ニ}$ と $|D| = \text{ヌ}$ になり, 条件 ナ を満たしていることが分かる。

比較静学。おもちゃのパンダイが利潤最適化問題を解いた結果, ママゴッチとファーボーの最適供給量は, 市場の構造から決まってくるある外生変数 a_0, b_0 に依存する 2 本の 1 階の条件式 (12) と (13) から決まった。この 2 本の最適条件式は一般形で以下のように書き表わせる。

$$F(Q_1, Q_2, a_0, b_0) = 0 \quad (14)$$

$$G(Q_1, Q_2, a_0, b_0) = 0 \quad (15)$$

ここで, 人々の嗜好が突然変化し, 以前と同じ価格の下でもママゴッチの方をより欲するようになったとしよう。この変化は, (1) 式と (2) 式の需要関数の中の変数 ネ が増加したことによって表わすことができる。この時, ママゴッチとファーボーの最適供給量をどのように変化させればよいかは, 最適供給量を表わす (14) 式と (15) 式で決定される Q_1, Q_2 が ネ の増加によってどのように変化するかを見てやればよい。これは,

$$\left. \frac{dQ_i}{d \text{ネ}} \right|_{\text{他の外生変数一定}} \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

を求めることにほかならない。

(14) と (15) 式の両方を同時に満たすような (16) を求めるには, まず, (14) と (15) 式を全微分する。そして, 全微分した式の両辺を $d \text{ネ}$ で割ってやり, $d \text{ネ}$ 以外の外生変数の変化量をゼロとおく。それを行列表示に書きかえると以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} \text{フ} \\ \text{ヘ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dQ_1}{d \text{ネ}} \\ \frac{dQ_2}{d \text{ネ}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ハ} \\ \text{ニ} \end{pmatrix} \quad (\text{ただし他の外生変数は一定})$$

あとは, クラメールの公式を用いて, $dQ_1/d \text{ネ}$ と $dQ_2/d \text{ネ}$ を求めてやればよい。

(1) 上の空欄 ア — ハ に適切な語句，数字，または記号を入れなさい．なお，空欄に入れる語は重複しても構わない．また，空欄の大きさと入れるべき語句の量に何ら関係はない．
(各 4 点，計 104 点)

(2) 下線 (1) の他の 3 種類を挙げなさい．(各 2 点，計 6 点)